Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2017/2018-as tanév
1. forduló
Haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy derékszögű háromszög alapú egyenes hasáb minden élének hossza egész szám. A hasábnak van 30 és 13 területegységű lapja (alaplap vagy oldallap). Mekkora a hasáb felszíne és térfogata? **7 pont**

Megoldás: Az alaplap derékszögű háromszög oldalainak pitagoraszi számhármasoknak kell lenni. 1 pont

Ha a 13 területű lap alaplap lenne, akkor $ab = 26$-nak kellene teljesülni, ahol a és b a derékszögű háromszög befogói. 1 pont

26 kétféle módon írható fel két egész szorzataként: $1 \cdot 26$ vagy $2 \cdot 13$, de sem az 1, sem a 2 nem lehet pitagoraszi számhármas tagja. 1 pont

Tehát a 13 oldallap, $13 = 1 \cdot 13$, ezek közül csak a 13 lehet a derékszögű háromszög oldala, ezért a hasáb magassága 1 egység. 1 pont

A 30 nem lehet oldallap területe, mert akkor az 1 egység magasság miatt az alapél lenne 30, és ez a 13-mal nem alkot pitagoraszi számhármast. 1 pont

Így az alap derékszögű háromszög területe 30. Ez meg is valósul 5 és 12 egység befogókkal és 13 egység hosszú átfogóval. 1 pont

A felszín 90, a térfogat 30 egység. 1 pont

2. Állítsuk elő az 1-et 2017 négyzetszám reciprokának összegeként, ahol a négyzetszámok között legalább 600 különböző szám fordul elő! **7 pont**

Megoldás: Először előállítjuk az 1-et négy darab $\frac{1}{4}$ összegeként. 1 pont

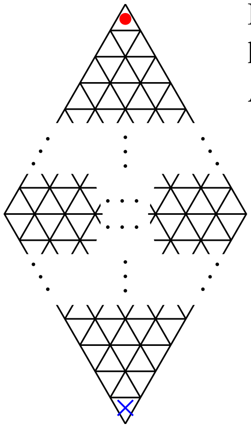
Az egyik $\frac{1}{4}$-et helyettesítjük 4 darab $\frac{1}{16}$-dal, majd az egyik $\frac{1}{16}$-ot 4 darab $\frac{1}{64}$-del és így tovább. 2 pont

A törtek száma minden lépésnél hárommal nő. 1 pont

Mivel a 4 és a 2017 hárommal osztva 1 maradékot ad, ezért eljuthatunk ezekkel a lépésekkel 2017 négyzetszámig. 1 pont

A lépések száma legyen k. Felírható az alábbi egyenlet: $4 + 3k = 2017$, $k = 671$. 1 pont

Így 672 különböző négyzetszámot kaptunk, azaz megfeleltünk a feltételeknek. 1 pont

3. 

Egy rombusz alakú játéktáblát felosztunk az alábbi ábra alapján $2n^2$ szabályos háromszögre. (*A rombusznak* 60° *és* 120°*-os szögei vannak!*) A két játékos, Anna és Balázs, a táblán a következő szabályok szerint játszanak:

- Anna kezd a saját kör alakú bábujával, amely a rombusz megjelölt „fölső csúcsában” van.
- Egy lépésével egy élben szomszédos mezőre lép.
- Majd Balázs lép hasonlóan a saját „alsó csúcsnál” lévő $\times$ alakú bábujával, és ezután a játékosok felváltva lépnek a saját bábuikkal.
- A játékot az nyeri...
  - ... aki a másik bábuját leüti (vagyis arra a mezőre lép a saját bábujával, ahol épp a másiké áll),
  - ... vagy aki a saját bábuját eljuttatja az ellenfél kezdő pozíciójára.

Okos játék esetén Anna, vagy Balázs nyer? **7 pont**

Megoldás: Színezzük ki a táblát „sakktáblaszerűen”! Vagyis két, élben szomszédos mező kapjon különböző (fekete vagy fehér) színt. Ekkor a játék minden lépése során ellentétes színű mezőre léphetünk csak.

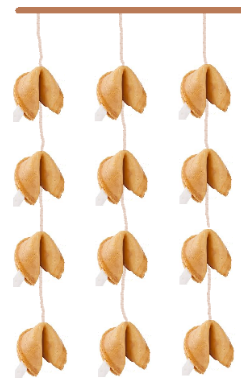
A két start-pozíció különböző színű, így mindig Anna lép olyan színű mezőre, ahol éppen akkor Balázs áll, míg Balázs mindig más színű mezőre lép, mint akkor éppen Anna színe, így csak Anna tudja leütni Balázs bábuját. 4 pont

(Ha ez a fenti gondolat – *Balázs, ha összejátszanánák sem tudná leütni Anna bábuját, így Balázs nem tudja akadályozni Annát semmilyen lépésében* – nincs bizonyítva, összesen legfeljebb 3 pont adható.)

Bár Balázs el tud menekülni azelől, hogy Anna leüsse a bábuját, ekkor viszont Anna belép Balázs start-pozíciójába pontosan $4n-3$ lépés alatt, és Balázs nem tudja ennél kevesebb lépés alatt elérni a saját célját. 2 pont

Vagyis okos játék esetén *Anna nyer*. 1 pont

4. Zsuzsi különleges karácsonyi ajándékkal lepte meg Petit. Szerencsesütiket sütött és ezeket felfűzte három cérnaszálra, minden cérnaszálon egymás alá négyet, majd a cérnákat egy hurkapálcára kötötte, az ábrán látható módon. Minden szerencsesütiben más-más jókívánság található. Az a szabály, hogy Peti egy adott cérnaszálról mindig csak a legalsó sütit eheti meg. Ha Peti elfogyaszt egy szerencsesütit, a jókívánságot kiragasztja a falra, sorban egymás mellé. Peti úgy gondolja, hogy a jókívánságok legalább 35 000-féle sorrendben követhetik egymást, Zsuzsi viszont azt állítja, hogy a jókívánságok lehetséges sorrendjeinek száma kevesebb, mint 35 000.



Kinek van igaza? **7 pont**

Megoldás: A 12 jókívánságot 12!-féle sorrendben lehetne felragasztani, ha nem lenne a szabály. 1 pont

A szabály miatt az egymás felett lévő jókívánságok csak egyféle sorrendben követhetik egymást, így minden esetet annyiszor számoltunk, ahányszor az egymás felett lévő 4-4 jókívánságot sorba rakhatjuk. 2 pont

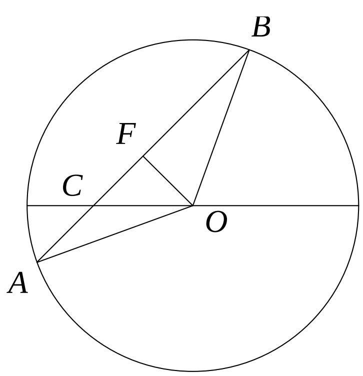
Így a lehetőségek száma: $\dfrac{12!}{4!\cdot 4!\cdot 4!}$ 2 pont

A számolás alapján a lehetőségek száma: 34 650. 1 pont

Tehát Zsuzsinak van igaza. 1 pont

5. Egy r sugarú kör átmérőjét 45°-os szögben metszi a kör AB húrja a C pontban. Bizonyítsuk be, hogy $AC^2 + BC^2 = 2r^2$! **7 pont**

Megoldás: Legyen F az AB húr felezőpontja.



Mivel FO merőleges AB-re, ezért a COF háromszög egyenlő szárú és derékszögű, tehát $CF = OF$. 1 pont

$$AC^2 + BC^2 = (AF - CF)^2 + (BF + CF)^2 =$$ 1 pont

$$= (AF - OF)^2 + (BF + OF)^2 =$$ 1 pont

$$= AF^2 + OF^2 - 2\cdot AF\cdot OF + BF^2 + OF^2 + 2\cdot BF\cdot OF$$ 1 pont

Mivel $AF = BF$, ezért $AC^2 + BC^2 = AF^2 + OF^2 + BF^2 + OF^2$. 1 pont

Felhasználva Pitagorasz tételét az AOF és BOF háromszögekben: $AC^2 + BC^2 = 2r^2$ 2 pont