

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2017/2018-as tanév
2. forduló
Haladók II. kategória

Feladatok

1. Egy tanár kijavította egy 12 fős csoport dolgozatait. A kijavított dolgozatok egymás felett helyezkednek el. A tanár készül felírni a jegyeket egy papírlapra, amelyen a tanulócsoporthoz tartozó tagjainak neve van ábécé rendben felsorolva. A lap egyik oldalán tíz név szerepel, a másik oldalon pedig kettő. A lapnak kezdetben az az oldala van felül, amelyiken tíz név szerepel. A tanár először a legfelül lévő dolgozat jegyét írja a megfelelő diák neve mellé, majd az alatta levőét és így tovább. (Természetesen az utolsó jegy beírása után már nem fordítja meg a lapot.)

Döntsük el, hogy minek nagyobb az esélye: annak, hogy a tanár a lapot legalább négyszer megfordítja a jegyek beírása során, vagy annak, hogy legfeljebb háromszor?

7 pont

2. Egy osztály túrázás közben azt játszotta, hogy egyikük összeadta a természetes számokat egy általa kiválasztott n természetes számig, és megmondta az eredményt a többieknek. Az mondhatta a következő összeget, aki először eltalálta n értékét.

Levente a 2273-at adta fel.

Péter közbeszólt: „Biztosan hibáztál összeadás közben, mert a természetes számok összege sohasem végződhet 73-ra!”

Bizonyítsuk be Péter állítását, azaz: Az első n természetes szám összege nem végződhet 73-ra!

7 pont

3. Egy kör metszi egy adott O csúcú ($\alpha < 180^\circ$) szög szarait, egyiket az A és B , másikat a C és D pontban. (Az A pont O és B között, a C pont O és D között van.) Az adott szög felezője a kört az M és az N pontban metszi. (O -hoz az M van közelebb.)

Bizonyítsuk be, hogy az \widehat{AM} ív és az \widehat{ND} ív összege egyenlő az \widehat{MC} ív és a \widehat{BN} ív összegével (a szóbanforgó négy ív az α szarai között van)!

7 pont

4. Adottak az alábbi egyenletek:

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{x+2} + \frac{p}{x+1} + \frac{q}{x} = 0 \quad (2)$$

Bizonyítsuk be, hogy ha mindkét egyenletnek két valós gyöke van és az (1) egyenletnek pontosan egy gyöke van a $]0; 1[$ intervallumban, akkor a (2) egyenletnek pontosan egy gyöke pozitív.

7 pont