

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2017/2018-as tanév

1. forduló

Haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsa be, hogy 7 egymást követő szám négyzetének az összege nem lehet négyzetszám! 7 pont

Megoldás: A középső számot n -nel jelölve $n - 3, n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2$ és $n + 3$ négyzetre emelését és az összeadást elvégezve az $S = 7(n^2 + 4)$ kifejezést kapjuk. 2 pont

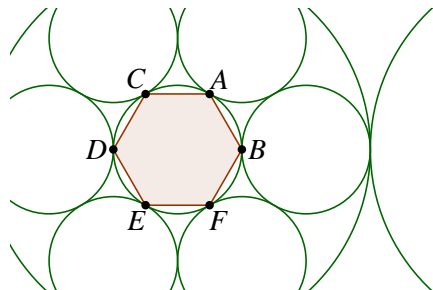
(Ez a pont akkor is jár, ha $n, n + 1, n + 2, \dots, n + 6$ négyzetre emelését végzi el helyesen, összevon és kiemeli a 7-et.)

Mivel a 7 prím, így ahhoz, hogy négyzetszámot kapjunk, $(n^2 + 4)$ -nek is oszthatónak kell lennie 7-tel. 2 pont

Ehhez az kellene, hogy n^2 maradéka 3 legyen 7-tel osztva. 1 pont

A lehetséges maradékok 0, 1, 2 és 4 (ennek megállapítása és igazolása 2 pont), így az összeg soha nem lesz 7-tel osztható. 2 pont

2.



Az egységnyi oldalú szabályos hatszög köré írt kört, majd ezt a kört kívülről érintő 6 egybevágó, egymást páronként érintő kört, mint ahogy az ábrán látható. Ezt követően e hat kört kívülről érintő nagyobb kört rajzolunk, majd ismét kifelé ezt érintő hat, egymást is páronként érintő kört rajzolunk. Az eljárást addig folytatjuk, míg nem keletkezik 2018-nál nagyobb sugarú kör. Hány kört rajzoltunk összesen? 7 pont

Megoldás: A szabályos hatszög köré írt köre $r_1 = 1$ sugarú, az ezt érintő 6 darab kör is $r_1 = 1$ sugarú kör. 1 pont

Ennek a hat körnek a „burkoló” köre $r_2 = 3$ sugarú ugyanúgy, mint az ezt érintő körök: $r_2 = r_1 + d_1 = r_1 + 2r_1 = 3r_1$. 1 pont

Ezt folytatva észrevehető, hogy $r_n = 3r_{n-1}$. 1 pont

Felírogatva a körök sugarait táblázatban

r_i	1	3	9	27	81	243	729	2487	...
db	7	7	7	7	7	7	7	7	...

, 1 pont

megállapítható, hogy $r_8 > 2018$. 1 pont

Minden kör kétszer szerepel, tehát $7 \cdot 7 = 49$ kört rajzoltunk eddig. 1 pont

Az első 2018-nál nagyobb kör rajzolásakor éppen 50 körünk van. 1 pont

3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x + 2\sqrt{y} = 2 \\ 2\sqrt{x} + y = 2 \end{cases} \quad 7 \text{ pont}$$

Megoldás: Vonjuk ki egymásból a két egyenletet, majd alakítsunk szorzattá:

$$x - y + 2(\sqrt{y} - \sqrt{x}) = (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 2) = 0 \quad 2 \text{ pont}$$

I. eset: $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$, ekkor $x = y$, $x + 2\sqrt{x} - 2 = 0$.

Mivel $\sqrt{x} \geq 0$, egyetlen megoldás adódik: $\sqrt{x_1} = -1 + \sqrt{3}$, azaz $x_1 = (-1 + \sqrt{3})^2 = 4 - 2\sqrt{3}$ 2 pont

II. eset: $\sqrt{x} = 2 - \sqrt{y}$

$$2(2 - \sqrt{y}) + y = 2$$

$(\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{y} + 2 = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív, így nincs megoldása. 2 pont

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $x = y = 4 - 2\sqrt{3}$. 1 pont

4. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet.

$$\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}} = 2\sqrt{x} \quad 7 \text{ pont}$$

Megoldás: A négyzetgyök miatt $x \in \mathbf{R}_0^+$. (A nevezőben lévő másodfokú kifejezés értéke minden x -re pozitív.) Mivel az $x = 0$ nem felel meg az egyenletnek, oszthatunk \sqrt{x} -szel. 1 pont

$$\sqrt{\frac{x^2 - 3x + 3}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x^2 - 3x + 3}} = 2 \quad 2 \text{ pont}$$

A számtani és mértani közepek közötti összefüggésből adódóan egy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2, s 2-vel éppen akkor egyenlő, amikor a két szám megegyezik.

$$\left(\sqrt{\frac{x^2 - 3x + 3}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x^2 - 3x + 3}} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 3}{x} \cdot \frac{x}{x^2 - 3x + 3}} = 2 \right) \quad 2 \text{ pont}$$

A szélsőértékét akkor veszi fel, ha a két szám egyenlő:

$$\sqrt{\frac{x^2 - 3x + 3}{x}} = \sqrt{\frac{x}{x^2 - 3x + 3}},$$

amiből

$$x = x^2 - 3x + 3$$

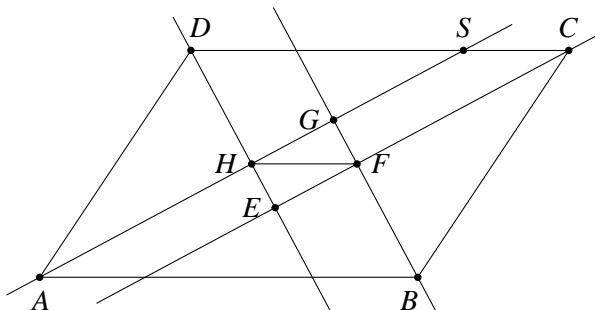
következik. Ez szorzattá alakítva

$$0 = (x - 1)(x - 3) \quad 1 \text{ pont}$$

lesz, ami pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Így $x = 1$, illetve $x = 3$ a két lehetséges megoldás, melyek ki is elégítik a fenti egyenletet. 1 pont

5. Egy paralelogramma oldalai a és b ($a \neq b$). Mekkora annak a négyszögnek az átlói, amelyet a paralelogramma szögfelezői alkotnak? 7 pont

Megoldás:



A paralelogramma középpontosan szimmetrikus, a megfelelő belső szögfelezők egymás tükörképei, tehát párhuzamosak. Így az $EFGH$ négyszög paralelogramma. 2 pont

Az A és D csúcsoknál lévő szögek összege 180° , így $\angle ADH + \angle HAD = 90^\circ$, ezáltal $\angle AHD = 90^\circ$, azaz $EFGH$ téglalap. 1 pont

A téglalap átlói egyenlő hosszúságúak, ezért elegendő pl. a HF átló hosszát meghatároznunk. A H pont illeszkedik az A és a D csúcsokhoz tartozó belső szögfelezőre is, így egyenlő távolságra van az AB és AD , valamint az AD és DC oldalaktól is, így rajta van az $ABCD$ paralelogramma AB -vel párhuzamos középvonalán. Ugyanez elmondható az F pontról is, így HF párhuzamos CD -vel. 2 pont

Mivel HS párhuzamos FC -vel, ezért HFC paralelogramma. ADS háromszög egyenlő szárú, így $HF = SC = |DC - DS| = |DC - DA| = |a - b|$. Az $EFGH$ négyszög átlóinak hossza megegyezik az $ABCD$ paralelogramma két szomszédos oldalának különbségével. 2 pont