

**Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny**  
**2017/2018-as tanév**  
**2. forduló**  
**Haladók II. kategória**

**Megoldások és javítási útmutató**

1. Egy tanár kijavította egy 12 fős csoport dolgozatait. A kijavított dolgozatok egymás felett helyezkednek el. A tanár készül felírni a jegyeket egy papírlapra, amelyen a tanulócsoporthoz tagjainak neve van ábécé rendben felsorolva. A lap egyik oldalán tíz név szerepel, a másik oldalon pedig kettő. A lapnak kezdetben az az oldala van felül, amelyiken tíz név szerepel. A tanár először a legfelül lévő dolgozat jegyét írja a megfelelő diák neve mellé, majd az alatta levőét és így tovább. (Természetesen az utolsó jegy beírása után már nem fordítja meg a lapot.)

Döntsük el, hogy minek nagyobb az esélye: annak, hogy a tanár a lapot legalább négyszer megfordítja a jegyek beírása során, vagy annak, hogy legfeljebb háromszor?

**7 pont**

**Megoldás:** Nevezzük a lap hátoldalának azt az oldalát, amelyen két név szerepel. A lapot legfeljebb négyszer kell a tanárnak megfordítania, és pontosan akkor fogja négyszer megfordítani, ha a hátoldalon szereplő két diák neve nincs közvetlenül egymás alatt a névsorban, továbbá az egyik ilyen név nem legalul szerepel.

2 pont

A 12 diák dolgozata  $12!$ -féle sorrendben jöhet egymás után.

1 pont

Most számoljuk meg azokat az eseteket, ahol a hátoldalon lévő két diák neve közvetlenül egymás alatt van, vagy a két név közül az egyik legalul van. Ha az egyik név alul van, az  $2 \cdot 11!$  darab eset, mert 2-féle módon választhatjuk ki az alul lévő nevet, és a maradék 11 nevet  $11!$ -féle módon rakhatjuk sorba.

1 pont

Azokat az eseteket kell még megszámlálni, amikor a két név egyike sincs legalul, de közvetlenül egymás alatt vannak. A lejjebb lévő név lehet a 2., 3., ..., 11. helyen: ez 10 lehetőség. Ez így tehát összesen  $10 \cdot 2 \cdot 10! = 20 \cdot 10!$  lehetőség.

1 pont

Az olyan esetek száma tehát, ahol legfeljebb háromszor kell megfordítania a tanárnak a lapot,  $2 \cdot 11 \cdot 10! + 2 \cdot 10 \cdot 10! = 42 \cdot 10!$ . Mivel az összes eset száma  $12! = 132 \cdot 10!$ , így annak nagyobb az esélye, hogy a tanárnak meg kell négyszer fordítani a lapot (hiszen ez  $90 \cdot 10!$  darab eset).

2 pont

**Összesen:**

---

**7 pont**

**Másik megoldás:** Gondolatban írjuk fel sorban a tanulók nevét abban a sorrendben, amelyben a dolgozataik szerepelnek, majd írjunk egy 1-est a tanuló neve helyére, ha a névsort tartalmazó lapon az elől lévő oldalon, illetve egy 2-est, ha a hátul lévő oldalon szerepel. 1 pont

Vizsgáljuk a nevek helyére írt, tíz darab 1-es és két darab 2-es számból álló sorozatot.

Legfeljebb négyszer kell megfordítani a lapot: a két 2-es előtt és után.

Pontosan négyszer pedig akkor kell megfordítani a lapot, ha mindkét 2-es után 1-es jön (ekkor ugyanis mindkét 2-es előtt is és után is fordítunk). 1 pont

Vonjuk össze a 2-eseket az utánuk következő 1-essel, és tekintsük 21-esnek. Eszerint négy fordítás abból a sorrendből alakulhat ki, amikor nyolc darab 1-es és két darab 21-es szerepel a sorban, vagyis tíz pozíción szerepel nyolc 1-es és két 21-es. 1 pont

Ez  $\binom{10}{2} = 45$ -féleképpen fordulhat elő. 1 pont

Az összes lehetséges számsorozat esetében 12 helyen szerepel tíz 1-es és két 2-es, ami  $\binom{12}{2} = 66$  lehetőséget jelent. 1 pont

A megmaradó  $66 - 45 = 21$  esetben elég legfeljebb háromszor fordítani. 1 pont

Ezért annak nagyobb az esélye, hogy négyszer kell megfordítani a lapot. 1 pont

---

**Összesen:** 7 pont

**Megjegyzés:** Többféle jó számolás elképzelhető, ahol más és más az összes eset száma. Ezekért természetesen jár a teljes pontszám, ha kihozza a két eset számainak helyes arányát (7 : 15).

2. Egy osztály túrázás közben azt játszotta, hogy egyikük összeadta a természetes számokat egy általa kiválasztott  $n$  természetes számig, és megmondta az eredményt a többieknek. Az mondhatta a következő összeget, aki először eltalálta  $n$  értékét.

Levente a 2273-at adta fel.

Péter közbeszólt: „Biztosan hibáztál összeadás közben, mert a természetes számok összege sohasem végződik 73-ra!”

Bizonyítsuk be Péter állítását, azaz: Az első  $n$  természetes szám összege nem végződik 73-ra! **7 pont**

**1. megoldás:** Használjuk fel, hogy a természetes számok összege:  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ . **1 pont**

Ezt átalakítva:

$$\begin{aligned} 2S_n &= n^2 + n \\ 8S_n &= 4n^2 + 4n \\ 8S_n + 1 &= (2n + 1)^2 \end{aligned} \quad \text{2 pont}$$

Indirekt tegyük fel, hogy  $S_n = 100k + 73$ , ahol  $k$  természetes szám.

Ekkor  $8S_n + 1 = 800k + 584 + 1 = 100(8k + 5) + 85$  alakú, tehát 85-re végződik. **1 pont**

Az 5-re végződő négyzetszámok  $(10l + 5)^2$  alakban írhatók fel, ahol  $l$  természetes szám. **1 pont**

De  $(10l + 5)^2 = 100l^2 + 100l + 25 = 100(l^2 + l) + 25$ , tehát egy 5-re végződő négyzetszám csak 25-re végződhet. **1 pont**

Ellentmondásra jutottunk, tehát hamis volt a felvetésünk, azaz  $S_n$  nem végződhet 73-ra. **1 pont**

**Összesen:** **7 pont**

**2. megoldás:** Írjuk fel az első tíz végződést!

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S_n$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

**1 pont**

Képezzük az  $S_n$ -ből az  $S_{n+10}$ -et! Mivel a hozzáadott tíz tag végén minden számjegy pontosan egyszer fordul elő és ezek összege 45, ezért  $S_{n+10}$  utolsó számjegye 5-tel nagyobb vagy 5-tel kisebb  $S_n$  utolsó számjegyénél. **1 pont**

Ezek alapján  $S_{20}$ -ig  $S_2$  és az előbbieik alapján  $S_{17} = 153$  végződik háromra, de egyik sem végződik 73-ra. **1 pont**

Az előbbiekből következik, hogy  $S_{n+20}$  utolsó számjegye megegyezik  $S_n$  utolsó számjegyével, tehát csak  $S_{20k+2}$  és  $S_{20k+17}$  végződhet háromra. **1 pont**

Az  $S_n$ -hez adott 20 szám összege:  $(n+1) + (n+2) + \dots + (n+20) = 20n + 210$ . **1 pont**

Ez  $n = 20k + 2$  esetén  $400k + 250$ ,  $n = 20k + 17$  esetén  $400k + 550$  alakú. **1 pont**

Viszont így a 03 és 53 végzések váltogatják egymást, tehát nem lehet a végződés 73. **1 pont**

**Összesen:** **7 pont**

3. Egy kör metszi egy adott  $O$  csúcsú ( $\alpha < 180^\circ$ ) szög száraival, egyiket az  $A$  és  $B$ , másikat a  $C$  és  $D$  pontban. (Az  $A$  pont  $O$  és  $B$  között, a  $C$  pont  $O$  és  $D$  között van.) Az adott szög felezője a kört az  $M$  és az  $N$  pontban metszi. ( $O$ -hoz az  $M$  van közelebb.)

Bizonyítsuk be, hogy az  $\widehat{AM}$  ív és az  $\widehat{ND}$  ív összege egyenlő az  $\widehat{MC}$  ív és a  $\widehat{BN}$  ív összegével (a szóbanforgó négy ív az  $\alpha$  szárai között van)!

7 pont

**Megoldás:**

Az  $M$  ponton át húzzunk párhuzamos félegyeneseket az adott  $O$  csúcsú  $\alpha$  szög száraival, az így kapott szög szára a kör  $\widehat{BN}$  ívét a  $P$ ,  $\widehat{ND}$  ívét az  $R$  pontban metszik.

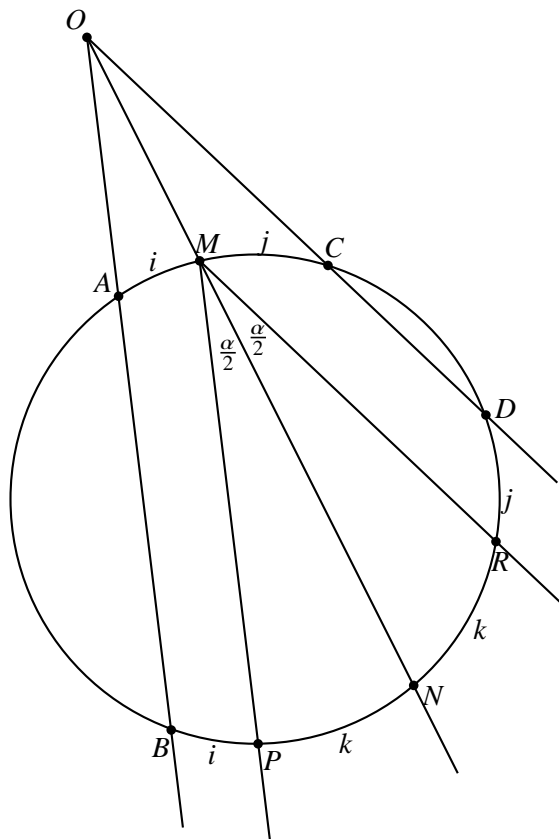
2 pont

Az  $\widehat{AM}$  ív és a  $\widehat{BP}$  ív a körnek két párhuzamos egyenes közé eső ívei, ezért egyenlők, e két ív hossza legyen  $i$ . Hasonlóan az  $\widehat{MC}$  ív és az  $\widehat{RD}$  ív is egyenlők, ezek hossza legyen  $j$ .

2 pont

A  $\widehat{PN}$  és az  $\widehat{RN}$  ívek pedig a körnek ugyanakkora kerületi szögekhez tartozó ívei, ezért egyenlők, ezek hossza legyen  $k$ .

2 pont



$$\widehat{AM} + \widehat{ND} = i + k + j = \widehat{MC} + \widehat{BN}$$

1 pont

**Összesen:**

**7 pont**

4. Adottak az alábbi egyenletek:

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{x+2} + \frac{p}{x+1} + \frac{q}{x} = 0 \quad (2)$$

Bizonyítsuk be, hogy ha mindkét egyenletnek két valós gyöke van és az (1) egyenletnek pontosan egy gyöke van a  $]0; 1[$  intervallumban, akkor a (2) egyenletnek pontosan egy gyöke pozitív. **7 pont**

**Megoldás:** Mivel az (1) egyenletnek pontosan egy gyöke van a  $]0; 1[$  intervallumban, ezért az  $f(x) = x^2 + px + q = 0$  másodfokú függvény helyettesítési értékei a 0 és az 1 helyen különböző előjelűek. **1 pont**

$$f(0) = q \text{ és } f(1) = 1 + p + q. \quad \text{1 pont}$$

A (2) egyenletet átalakítva az  $(1 + p + q)x^2 + (1 + 2p + 3q)x + 2q = 0$  másodfokú egyenlethez jutunk. **2 pont**

Ennek gyökei pontosan akkor különböző előjelűek, ha  $x_1 \cdot x_2 < 0$ . **1 pont**

$$\text{A gyökök és együtthatók összefüggései alapján: } x_1 \cdot x_2 = \frac{2q}{1 + p + q} < 0. \quad \text{1 pont}$$

$$\text{Mivel } q \text{ és } 1 + p + q \text{ különböző előjelűek, ezért } \frac{2q}{1 + p + q} < 0. \quad \text{1 pont}$$

**Összesen:**

**7 pont**

**Megjegyzés:** Az első egyenletből kapott  $q(1 + p + q) < 0$  összefüggés az alábbi módon is megkapható:

A gyökök elhelyezkedésére két lehetőség van.

$$1. \ 0 < \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ és } \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} < 1 \text{ és } 1 \leq \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Mivel két valós gyök van, ezért  $p^2 - 4q > 0$ . Az első egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha  $p < 0$  és  $q > 0$ .

A második egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha  $-2 < p$ , vagy ha  $(p \leq -2 \text{ és } p + q + 1 < 0)$ .

A harmadik egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha  $p \leq -2$ , vagy ha  $(p > -2 \text{ és } p + q + 1 \leq 0)$ . **1 pont**

$$2. \ \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \leq 0 \text{ és } 0 < \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ és } \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} < 1$$

Az első egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha  $p > 0$ , vagy ha  $(p \leq 0 \text{ és } q < 0)$ .

A második egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha  $p < 0$ , vagy ha  $(p \geq 0 \text{ és } q < 0)$

A harmadik egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha  $p \geq -2$  és  $0 < p + q + 1$ . **1 pont**

Az első egyenlőtlenség-rendszer tehát pontosan akkor teljesül, ha  $q > 0$ , és  $p \leq -2$  esetén  $p + q + 1 < 0$ ; valamint  $-2 < p < 0$  esetén  $p + q + 1 < 0$ . Összefoglalva:  $q(1 + p + q) < 0$ .

A második egyenlőtlenség-rendszer pontosan akkor teljesül, ha  $p \geq -2$  és  $0 < p + q + 1$ , valamint  $p > 0$  esetén  $q < 0$  vagy  $p \leq 0$  esetén  $q < 0$ . Összefoglalva:  $q(1 + p + q) < 0$ . **1 pont**