

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2017/2018-as tanév

1. forduló

Kezdők I–II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Számítsuk ki az alábbi összeget:

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2018}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \dots - \frac{2}{2018}\right) + \left(-\frac{3}{4} + \dots - \frac{3}{2018}\right) + \dots + \left(-\frac{2017}{2018}\right).$$

6 pont

Megoldás: Rendezzük át az összeget a következőképpen:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) + \dots - \left(\frac{1}{2018} + \frac{2}{2018} + \frac{3}{2018} + \frac{4}{2018} + \dots + \frac{2017}{2018}\right) = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1+2}{3} - \frac{1+2+3}{4} + \frac{1+2+3+4}{5} + \dots - \frac{1+2+3+\dots+2017}{2018} \end{aligned}$$

3 pont

Használjuk az első n természetes szám összegére az $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ összefüggést!

1 pont

Ekkor a keresett összeg:

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{2} - \frac{3}{2} + \frac{4}{2} - \dots - \frac{2017}{2} = \frac{1}{2}(-1 + 2 - 3 + 4 - \dots - 2017) = \frac{1008 - 2017}{2} = -\frac{1009}{2}.$$

2 pont

2. Az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaznak hány olyan hételemű részhalmaza van, amelyben az elemek összege osztható 3-mal?

6 pont

Megoldás: Egy kilencelemű halmazban bármely hételemű részhalmaz és annak kételemű komplementere kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást, ezért a hételemű részhalmazok helyett elegendő a kételemű részhalmazokkal foglalkozni.

2 pont

Mivel az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaz elemeinek összege 45, amely 3-mal osztható, így ha egy hételemű részhalmazban az elemek összege osztható 3-mal, akkor a komplementerhalmaz két elemének összege is osztható 3-mal.

1 pont

Két szám összege pontosan akkor osztható 3-mal, ha vagy mindkettő osztható 3-mal, vagy pedig az egyiknek 1, a másiknak 2 a 3-mal való osztási maradéka. Az első esetben a 3, 6, 9 számok közül háromféleképpen készíthetünk kételemű halmazt; a második esetben az 1 maradékot adó és a 2 maradékot adó szám kiválasztására is 3 lehetőségünk van, így $3 \cdot 3 = 9$ -féle részhalmaz készíthető.

2 pont

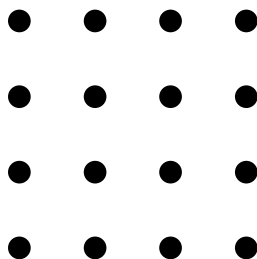
Összesen tehát 12 olyan részhalmaz van, amely megfelel a feladat feltételeinek.

1 pont

Megjegyzések:

1. Ha a versenyző csak felsorolja a 12 megfelelő részhalmazt, de nem indokolja, hogy miért nincs több, akkor 3 pontot kaphat.
2. Hiányos felsorolás esetén a tanulónak nem adható pont!

3. Egy 3×3 -as négyzetrács rácspontjait kijelölve az alábbi 16 pontból álló ábrát kaptuk:



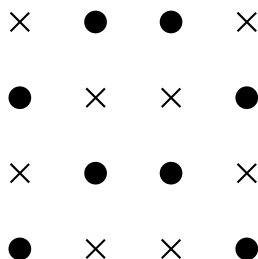
Legfeljebb hány pontot lehet kijelölni a 16 pontból úgy, hogy a pontok közül semelyik három ne essen egy egyenesre?

6 pont

Megoldás:

- a) Ha $4 \cdot 2 + 1 = 9$ pontot jelölünk ki, akkor a skatulyaelv értelmében pl. a 4 vízszintes helyzetű rácsegyenes valamelyikén lesz 3 olyan pont, amelyek egy rácsvonalra esnek. Így legfeljebb 8 pont jelölhető ki a kívánt feltételeknek megfelelően.
- b) 8 pont kijelölhető a feladat feltételének megfelelően. Az ábra egy ilyen esetet mutat be. (Vigyázni kell arra, hogy nemcsak a rácsegyenesek, hanem az átlós egyenesekre is legfeljebb két-két pont kerülhet!)

3 pont



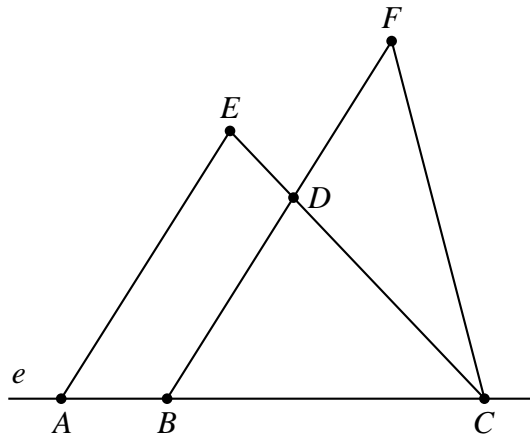
Megjegyzések:

1. Ha a versenyző csak azt mutatja meg, hogy az általa megadott 8 pontból álló konstrukció tovább nem bővíthető, akkor az első három pontot nem kaphatja meg, azaz összesen legfeljebb 3 pontot kaphat.
2. Ha a tanuló konstrukciója hibás, akkor a b) részre nem kaphat pontot.

4. Egy e egyenesen felvesszük az A, B, C pontokat úgy, hogy $AB = 2$, $BC = 6$ és a B pont az AC szakasz belső pontja. Az e egyenes azonos partján az AC és BC szakaszokra olyan ACE és BCF háromszögeket rajzolunk, melyekre $AE = 6$ és $CE = 7$, illetve $BF = 8$ és $CF = 7$. Legyen D a BF és a CE szakaszok metszéspontja. Határozzuk meg az $ABDE$ négyszög és a CDF háromszög területének arányát!

6 pont

Megoldás:



Az $AC = BF = 8$, $CE = CF = 7$ és $AE = BC = 6$ egyenlőségek alapján az ACE és BCF háromszögek egybevágók, így területük azonos.

3 pont

Mindkét alakzathoz elvéve a BCD háromszöget, az $ABDE$ négyszöghöz, illetve a CDF háromszöghöz jutunk.

2 pont

Így ezek területe is azonos, vagyis a keresett területarány $t_{ABDE} : t_{CDF} = 1$.

1 pont