26. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Somorja, 2017. március 23-27.

11. osztály

1. feladat: A Nemzetközi Magyar Matematikaverseny résztvevői délután is hasznosan töltik az idejüket: sakkversenyt rendeznek. A versenyzők két kategóriába oszthatók: kockákra és nagyágyúkra. A versenyen mindenki mindenki ellen játszott egy mérkőzést. A verseny vége után észrevették, hogy minden versenyző a pontszámai felét éppen a kockák elleni mérkőzésein szerezte. Mutassátok meg, hogy ha m az összes versenyző számát jelöli és nem volt egyetlen döntetlen sem, akkor $\sqrt{m}$ egész szám.

Kekeňák Szilvia (Kassa)

2. feladat: Minden természetes $n \geq 2$-re bizonyítsátok be a $3^{2n-1} > n^4 + 10$ egyenlőtlenséget!

Dr. Bencze Mihály (Bukarest)

Bálint Béla (Zsolna)

3. feladat: Legyen $f(x) = x^2 + 6x + 1$ és jelölje M a koordináta-sík azon $(x; y)$ pontjainak a halmazát, amelyekre $f(x) + f(y) \leq 0$ és $f(x) - f(y) \leq 0$. Mekkora az M ponthalmaz területe?

Dr. Kántor Sándorné (Debrecen)

4. feladat: A természetes számok halmazán oldjátok meg a következő egyenletet:

$$x - y - \frac{x}{y} - \frac{x^3}{y^3} + \frac{x^4}{y^4} = 2017.$$

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

5. feladat: Kati papírból háromszögeket vágott ki. Mindegyik háromszögnek volt egy 5 cm és egy 11 cm hosszú oldala, és a harmadik oldal hossza szintén cm-ben mérve egész szám volt. Pisti észrevette, hogy semelyik két háromszög nem volt egybevágó, de ha kivágott volna Kati még egy, a szabályoknak megfelelő háromszöget, akkor az biztosan egybevágó lett volna valamelyik korábban kivágottal. A kivágott háromszögekkel Kati és Pisti játszani kezdett. Felváltva léptek. Egy lépésben egy hegyesszögű, vagy egy tompaszögű, vagy két tompaszögű háromszöget lehetett elvenni. Az nyert, aki utoljára lépett. Melyik játékosnak volt nyerő stratégiája, ha elsőként Kati lépett?

Erdős Gábor (Nagykanizsa)

6. feladat: Adott egy olyan ABC háromszög, melyben $BAC\sphericalangle = 60°$ és $ABC\sphericalangle = 50°$. Legyen O egy olyan pont az ABC háromszög belsejében, melyre $AOC\sphericalangle = 100°$ és $CBO\sphericalangle = 30°$. Határozzátok meg az $OCB\sphericalangle$ mértékét!

Bíró Béla (Sepsiszentgyörgy)