Geometriai számítások, bizonyítások

1. Egy derékszögű háromszög egyik szöge 35°. Mekkora szögekre bontja az átfogóhoz tartozó magasság a derékszöget?

   35° és 55°

2. Bizonyítsuk be, hogy egy paralelogramma (ami nem rombusz) szögfelezői téglalapot határoznak meg.

   Szögfelezők az oldallal derékszögű háromszöget határoznak meg.

3. Egy háromszög két szöge 67° és 33°. Mekkora szöget zár be egymással a harmadik csúcshoz tartozó magasság és a belső szögfelező?

   17°

4. Bizonyítsuk be, hogy ha a téglalap átlói 60°-os szöget zárnak be egymással, akkor az egyik oldal fele az átlónak.

   Szabályos háromszög jön létre.

5. Bizonyítsuk be, hogy egy kör két átmérőjének a végpontjai téglalapot határoznak meg.

   Egyenlő szárú háromszögek.

6. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egy csúcsához tartozó szögfelező a szemközti oldalakkal olyan szögeket zár be, amelyeknek a különbsége megegyezik a háromszög másik két szögének különbségével.

   A szögfelező és a szemközti oldal metszéspontjánál keletkező két szög egy háromszög belső ill. külső szöge.

7. Bizonyítsuk be, hogy egy szögnek és mellékszögének szögfelezői egymásra merőlegesek!

   Szög és mellékszögének összege 180°.

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszög két belső szögfelezője 90°-nál annyival kisebb szöget zár be, mint amennyi a harmadik szög fele.

   A szögfelezők az egyik oldallal egy háromszöget alkotnak.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög egy külső szöge egy nem mellette fekvő belső szög kétszerese, akkor a háromszög egyenlő szárú.

   Nevezzük el a külső szöget α-val, majd határozzuk meg a szögeket.

10. Az ABC hegyesszögű háromszög a oldalának végpontjaiból bocsássunk merőlegeseket a háromszög másik két oldalára. A két merőleges által bezárt szög 72°. Mekkora a háromszög α szöge?

    72° vagy 108°

11. Bizonyítsuk be, hogy egy egyenlő szárú háromszög alappal szemközti csúcsába szerkesztett *külső* szögfelező párhuzamos az alappal.

    A külső szög mellékszöge a szögnek.

12. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AB átfogóján vegyük fel az E és D pontokat úgy, hogy $BE = BC$ és $AD = AC$ teljesüljön. Bizonyítsuk be, hogy a CDE háromszög egyenlő szárú és szárszöge 45°.

    Az $ADC\triangle$ és $CEB\triangle$ is egyenlő szárú.

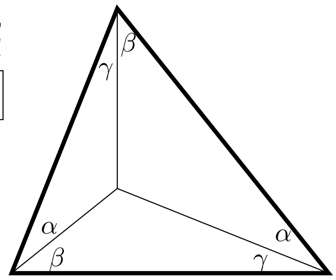
13. Az ABC háromszög leghosszabb oldala AC. Ezen vegyük fel a D és E pontokat úgy, hogy $AD = AB$ ill. $CE = CB$. Fejezzük ki a $DBE\triangle$ szögeit az eredeti háromszög szögeivel!

    $90° - \frac{\alpha}{2}$, $90° - \frac{\beta}{2}$, $90° - \frac{\gamma}{2}$

14. Az $ABC\triangle$-ben $AB = AC$. Hosszabbítsuk meg a BA oldalt A-n túl egy D pontig úgy, hogy $BA = AD$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy $BCD\triangle$ derékszögű!

    Háromszögek belső és külső szögei.

15. Az ábrán az azonos betűvel jelzett szögek egyenlőek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a berajzolt szakaszok a háromszög magasságvonalaira esnek!



Határozzuk meg az $\alpha+\beta+\gamma$ értékét.

16. Az A, B, C és D pontok ebben a sorrendben egy egyenesen vannak. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi összefüggés érvényes:

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0,$$

ahol a hosszak előjelesen értendőek!

Minden szakaszt írjunk fel „elemi” szakaszok összegeként.

17. Az A, B, C és D pontok ebben a sorrendben egy egyenesen helyezkednek el. Bizonyítsuk be, hogy

$$AC^2 \cdot BD^2 + CD^2 \cdot AB = BC^2 \cdot AD + AB \cdot BD \cdot AD.$$

Hasonlóan, mint az előző feladatot.

18. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög egyik oldala kétszerese a hozzá tartozó súlyvonalnak, akkor a háromszög derékszögű.

Kettő egyenlő szárú háromszög keletkezik.

19. Egy egyenlő szárú háromszög egyik szárát az alappal szemközti csúcson túl hosszabbítsuk meg a kétszeresére, és az így nyert pontot kössük össze az alap másik csúcsával. Mutassuk meg, hogy ez az összekötő egyenes merőleges az alapra.

Két egyenlő szárú háromszög szögei.

20. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög bármely oldala kisebb, mint a kerület fele.

Háromszög-egyenlőtlenség.

21. Bizonyítsuk be, hogy két párhuzamos egyenes egy-egy pontját összekötő szakasz felezőpontja egyenlő távol van a két egyenestől.

Egybevágó háromszögek.

22. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög bármely csúcsához tartozó súlyvonal egyenese egyenlő távolságra van a másik két csúcstól.

Egybevágó háromszögek.

23. Húzzunk két párhuzamos egyenest egy négyzet két átellenes csúcsán át, és emeljünk ezekre merőlegeseket a másik két csúcsból. Bizonyítsuk be, hogy ez a négy egyenes egy négyzetet határól.

Egybevágó háromszögek.
Két esetet kell megvizsgálni!

24. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög két oldalfelező pontját összekötő egyenes (középvonalra illeszkedő egyenes) egyenlő távol halad a háromszög mindhárom csúcsától.

Húzzunk párhuzamost a harmadik csúcson keresztül, majd állítsunk erre merőlegest a felezőpontból.

25. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenlő szárú háromszög alapján bárhogy veszünk fel egy pontot, a száraktól mért távolságának összege állandó érték!

Tükrözzük a háromszöget az alapra.

26. Bizonyítsuk be, hogy egy szabályos háromszög belső pontjának a három oldaltól mért távolságösszege állandó.

Húzzunk párhuzamost a ponton keresztül az egyik oldallal, majd az előző feladat.

27. Bizonyítsuk be, hogy ha egy paralelogramma szomszédos oldalai a és b ($a > b$), akkor a belső szögfelezői által meghatározott téglalap átlóinak hossza $a - b$.

Paralelogramma középvonalain vannak a szögfelezők metszéspontjai.
Egyenlő szárú háromszögek.