

Oszthatóság, számrendszerek

1. Mi az utolsó számjegye az alábbi számoknak?

- a) 2^{100} b) 3^{100} c) 4^{112} d) 5^{1223} e) 6^{255} f) 7^{8444} g) 8^{421} h) 9^{127}

2. Milyen számjegyre végződnek az alábbi összegek?

- a) $2^{20} + 3^{20}$ b) $4^{12} + 5^{12} + 6^{12}$ c) $11^{11} + 22^{22} + 33^{33}$
d) $123^{123} + 124^{124} + 125^{125}$ e) $1234^{4321} + 4321^{1234}$

3. Egy négyzetszámnak milyen végződései lehetnek?

4. Lehet-e a $2001^{2001} + 2002^{2002} + 2003^{2003}$ négyzetszám?

5. Bizonyítsuk be, hogy

- a) 15 osztója $2^{16} - 1$ -nek b) 17 osztója $2^{16} - 1$ -nek c) 24 osztója $5^{20} - 1$ -nek
d) 6 osztója $17^n - 11^n$ -nek e) 10 osztója $2^9 + 2^{99}$ -nek
f) 10 osztója $2001^{2001} + 2002^{2002} + 2003^{2003} + 2004^{2004} + 2005^{2005} + 2006^{2006} + 1$ -nek

6. Határozzuk meg a következő számok legnagyobb közös osztóját:

- a) 36; 96 b) 55; 75 c) 125; 225 d) 126; 4900
e) 128; 512 f) 180; 336 g) 400; 1024 h) 567; 1053
i) 629; 799 j) 750; 2025 k) 754; 221 l) 840; 1560
m) 875; 2625 n) 12; 24; 40 o) 49; 77; 133 p) 30; 75; 630
q) 17; 34; 263 r) 187; 323; 391

7. Határozzuk meg a következő számok legkisebb közös többszörösét:

- a) 8; 28 b) 16; 28 c) 45; 150
d) 105; 180 e) 348; 476 f) 475; 570
g) 1840; 3400

8. Bizonyítsuk be, hogy ha

- a) $7 \mid 2a + 3b$, akkor $7 \mid 20a + 9b$ is;
 b) $19 \mid 4a - 3b$, akkor $19 \mid 36a + 11b$ is;
 c) $4 \mid 7a - 5b$, akkor $4 \mid 21a + 25b$ is;
 d) $21 \mid 9a - 3b$, akkor $21 \mid 99a + 9b$ is;
 e) $5 \mid 3a + 11b$, akkor $5 \mid 12a + 74ba$ is;
 f) $3 \mid 7a + 2b - 4c$, akkor $3 \mid 35a + 25b - 41c$ is;
 g) $13 \mid 7a + 8b$, akkor $13 \mid 35a + 14b$ is;
 h) $13 \mid 7a + 8b$, akkor $13 \mid 61a + 14b$ is;
 i) $6 \mid 12a - 5b$, akkor $6 \mid 48a - 44b$ is;
 j) $6 \mid 12a - 5b$, akkor $6 \mid 66a - 44b$ is;
 k) $11 \mid a + 2b + 3c$, akkor $11 \mid 3a - 5b - 2c$ is;
 l) $12 \mid 5a - 7b + 2c$, akkor $12 \mid 35a - 61b + 45c$ is;

9. Határozzuk meg az ismeretlen számjegyek értékét úgy, hogy a feltételek teljesüljenek!

- a) $\overline{2a3}$ osztható 9-cel; $\boxed{v = 7}$ b) $\overline{5b31}$ osztható 3-mal; $\boxed{q = 0; 3; 9; 6}$
 c) $\overline{6b42}$ osztható 6-tal; $\boxed{q = 0; 3; 9; 6}$ d) $\overline{4x3y}$ osztható 5-tel; $\boxed{h = 0; 5; x = 1; 4}$
 e) $\overline{52x3y}$ osztható 30-cal; $\boxed{h = 0; 2; 5; 8}$ f) $\overline{6x53y}$ osztható 45-tel; $\boxed{h = 0; 5; 8; 3; 6; 9}$

10. Bizonyítsuk be, hogy ha

- a) $a + b$ osztható 17-tel, akkor $b(2b + 3) + a(4b + 3) + 19a^2$ is;
 b) $2a - b$ osztható 13-mal, akkor $12a(a - b) + 3b(5 + b) - 4a$ is;

11. Írjuk fel 10-es számrendszerben az alábbi számokat!

- a) 1000_2 $\boxed{8}$ b) 10101_2 $\boxed{21}$ c) 1111_2 $\boxed{15}$ d) 1000_4 $\boxed{64}$ e) 1203_4 $\boxed{66}$
 f) 13231_4 $\boxed{493}$ g) 303_6 $\boxed{111}$ h) 452_6 $\boxed{176}$ i) 1204_6 $\boxed{292}$ j) 162_{16} $\boxed{354}$
 k) 1000_{16} $\boxed{4096}$ l) $B6F_{16}$ $\boxed{2927}$

12. Írjuk fel a következő számokat 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös és 12-es számrendszerben!

- a) 12 $\boxed{110_2, 110_3, 22_4, 22_5, 10_{12}}$ b) 64 $\boxed{100000_2, 2101_3, 224_4, 54_{12}, 100_5}$ c) 100 $\boxed{1100100_2, 10201_3, 1210_4, 400_5, 84_{12}}$
 d) 128 $\boxed{1000000_2, 11202_3, 2000_4, 1003_5, 48_{12}}$ e) 321 $\boxed{10100001_2, 102220_3, 11001_4, 2241_5, 229_{12}}$