Oszthatóság, számrendszerek

1. Mi az utolsó számjegye az alábbi számoknak?

   a) 2^{100} $\boxed{6}$ b) 3^{100} $\boxed{1}$ c) 4^{112} $\boxed{6}$ d) 5^{1223} $\boxed{5}$ e) 6^{255} $\boxed{6}$ f) 7^{8444} $\boxed{1}$ g) 8^{421} $\boxed{8}$ h) 9^{127} $\boxed{9}$

2. Milyen számjegyre végződnek az alábbi összegek?

   a) $2^{20} + 3^{20}$ $\boxed{7}$ b) $4^{12} + 5^{12} + 6^{12}$ $\boxed{7}$ c) $11^{11} + 22^{22} + 33^{33}$ $\boxed{8}$

   d) $123^{123} + 124^{124} + 125^{125}$ $\boxed{8}$ e) $1234^{4321} + 4321^{1234}$ $\boxed{5}$

3. Egy négyzetszámnak milyen végződései lehetnek? $\boxed{1, 4, 5, 6, 9}$

4. Lehet-e a $2001^{2001} + 2002^{2002} + 2003^{2003}$ négyzetszám? $\boxed{\text{Nem. A végződést kell vizsgálni.}}$

5. Bizonyítsuk be, hogy

   a) 15 osztója $2^{16} - 1$-nek b) 17 osztója $2^{16} - 1$-nek c) 24 osztója $5^{20} - 1$-nek

   d) 6 osztója $17^n - 11^n$-nek e) 10 osztója $2^9 + 2^{99}$-nek

   f) 10 osztója $2001^{2001} + 2002^{2002} + 2003^{2003} + 2004^{2004} + 2005^{2005} + 2006^{2006} + 1$ -nek

6. Határozzuk meg a következő számok legnagyobb közös osztóját:

   a) $36; 96$ $\boxed{12}$ b) $55; 75$ $\boxed{5}$ c) $125; 225$ $\boxed{25}$ d) $126; 4900$ $\boxed{14}$

   e) $128; 512$ $\boxed{128}$ f) $180; 336$ $\boxed{12}$ g) $400; 1024$ $\boxed{16}$ h) $567; 1053$ $\boxed{81}$

   i) $629; 799$ $\boxed{17}$ j) $750; 2025$ $\boxed{75}$ k) $754; 221$ $\boxed{13}$ l) $840; 1560$ $\boxed{120}$

   m) $875; 2625$ $\boxed{875}$ n) $12; 24; 40$ $\boxed{4}$ o) $49; 77; 133$ $\boxed{7}$ p) $30; 75; 630$ $\boxed{15}$

   q) $17; 34; 263$ $\boxed{1}$ r) $187; 323; 391$ $\boxed{17}$

7. Határozzuk meg a következő számok legkisebb közös többszörösét:

   a) $8; 28$ $\boxed{56}$ b) $16; 28$ $\boxed{112}$ c) $45; 150$ $\boxed{450}$

   d) $105; 180$ $\boxed{1260}$ e) $348; 476$ $\boxed{41412}$ f) $475; 570$ $\boxed{2850}$

   g) $1840; 3400$ $\boxed{156\,400}$

8. Bizonyítsuk be, hogy ha

a) $7 \mid 2a+3b$, akkor $7 \mid 20a+9b$ is;

b) $19 \mid 4a-3b$, akkor $19 \mid 36a+11b$ is;

c) $4 \mid 7a-5b$, akkor $4 \mid 21a+25b$ is;

d) $21 \mid 9a-3b$, akkor $21 \mid 99a+9b$ is;

e) $5 \mid 3a+11b$, akkor $5 \mid 12a+74ba$ is;

f) $3 \mid 7a+2b-4c$, akkor $3 \mid 35a+25b-41c$ is;

g) $13 \mid 7a+8b$, akkor $13 \mid 35a+14b$ is;

h) $13 \mid 7a+8b$, akkor $13 \mid 61a+14b$ is;

i) $6 \mid 12a-5b$, akkor $6 \mid 48a-44b$ is;

j) $6 \mid 12a-5b$, akkor $6 \mid 66a-44b$ is;

k) $11 \mid a+2b+3c$, akkor $11 \mid 3a-5b-2c$ is;

l) $12 \mid 5a-7b+2c$, akkor $12 \mid 35a-61b+45c$ is;

9. Határozzuk meg az ismeretlen számjegyek értékét úgy, hogy a feltételek teljesüljenek!

a) $\overline{2a3}$ osztható 9-cel; $\boxed{a=4}$

b) $\overline{5b31}$ osztható 3-mal; $\boxed{b=0;3;6;9}$

c) $\overline{6b42}$ osztható 6-tal; $\boxed{b=0;3;6;9}$

d) $\overline{4x3y}$ osztható 5-tel; $\boxed{y=0;5,\ x \text{ bármi}}$

e) $\overline{52x3y}$ osztható 30-cal; $\boxed{y=0,\ x=2;5;8}$

f) $\overline{6x53y}$ osztható 45-tel; $\boxed{y=5,\ x=8 \text{ vagy } y=0,\ x=4}$

10. Bizonyítsuk be, hogy ha

a) $a+b$ osztható 17-tel, akkor $b(2b+3)+a(4b+3)+19a^2$ is;

b) $2a-b$ osztható 13-mal, akkor $12a(a-b)+3b(5+b)-4a$ is;

11. Írjuk fel 10-es számrendszerben az alábbi számokat!

a) 1000_2 $\boxed{8}$

b) 10101_2 $\boxed{21}$

c) 1111_2 $\boxed{15}$

d) 1000_4 $\boxed{64}$

e) 1203_4 $\boxed{99}$

f) 13231_4 $\boxed{493}$

g) 303_6 $\boxed{111}$

h) 452_6 $\boxed{176}$

i) 1204_6 $\boxed{292}$

j) 162_{16} $\boxed{354}$

k) 1000_{16} $\boxed{4096}$

l) $B6F_{16}$ $\boxed{2927}$

12. Írjuk fel a következő számokat 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös és 12-es számrendszerben!

a) 12 $\boxed{1100_2,\ 110_3,\ 30_4,\ 22_5,\ 10_{12}}$

b) 64 $\boxed{1\,000\,000_2,\ 2101_3,\ 1000_4,\ 224_5,\ 54_{12}}$

c) 100 $\boxed{1\,100\,100_2,\ 10\,201_3,\ 1210_4,\ 400_5,\ 84_{12}}$

d) 128 $\boxed{10\,000\,000_2,\ 11\,202_3,\ 2000_4,\ 1003_5,\ A8_{12}}$

e) 321 $\boxed{101\,000\,001_2,\ 102\,220_3,\ 11\,001_4,\ 2241_5,\ 229_{12}}$