

Sorozatok

1. Tekintsük a $dn+b$ kifejezést, ahol n pozitív egész szám, d és b tetszőleges valós számok. Igaz-e, hogy egy számtani sorozat szomszédos tagjait kapjuk, ha n helyébe rendre az $1, 2, 3, \dots$ értékeket helyettesítjük? $p = p, p + q = 1p, 1p + q = 2p$
2. Mutassuk meg, hogy minden számtani sorozat felírható $\{dn + b\}$ alakban, ahol $n \in \mathbb{N}^+$, d és b pedig állandó valós számok. $p = p, p + q = 1p$
3. Igaz-e, hogy egy számtani sorozat minden második tagja is számtani sorozatot alkot? Igaz-e, hogy egy számtani sorozat minden harmadik tagja is számtani sorozatot alkot? Hogyan általánosíthatunk? Igaz.
4. Egy (a_n) számtani sorozat ötödik tagja 7, tizenegyedik tagja 19. Adjuk meg a sorozat kezdőtagját és differenciáját! $2 = p, 11 - 1 = 1p$
5. Az (a_n) számtani sorozatban $a_4 = -2$ és $a_{11} = 5$. Mivel egyenlő a_{2008} ? 2002
6. Egy számtani sorozat nyolcadik tagja 8, differenciája 3. Hány tagja van a sorozatnak 500 és 700 között? 99
7. Határozzuk meg
- a) a háromjegyű páros számok összegét; 247050
- b) a háromjegyű páratlan számok összegét; 247500
- c) a legfeljebb háromjegyű páros ill. páratlan számok összegét. 250000
8. Szorozzuk össze 2 első száz pozitív egész kitevőjű hatványát. Hány jegyű az így kapott $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{100}$ szám? 1521
9. Mivel egyenlők az (a_n) számtani sorozatban az alábbi kifejezések?
- a) $\frac{a_7 + a_9}{2}$ 80 b) $\frac{a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{5}$ 40
- c) $\frac{a_7 + a_8 + a_{12} + a_{13}}{4}$ 010 d) $\frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{13}}{7}$ 20
10. Egy számtani sorozat ötödik tagja 10. Határozzuk meg az első kilenc tag összegét. 06
11. Három szám összege 18, szorzata 192, a három szám számtani sorozatot alkot. Melyik ez a három szám? 4, 6, 8
12. Hány olyan háromszög van, amelynek kerülete 30 egység, az oldalai egész számok és egy számtani sorozat egymást követő tagjai? (Az egybevágó háromszögeket nem tekintjük különbözőeknek) 5

13. Hány olyan háromszög van, amelynek szögei fokokban mérve egész számok, és egy számtani sorozat egymást követő tagjai? (A hasonló háromszögeket nem tekintjük különbözőeknek)
- 09
14. Hány oldalú az a sokszög, amelynek a szögei egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek az első tagja 120° , a differenciája pedig 5° ?
- 6
15. A 17, 18, ... szomszédos egész számok sorozatából kivettünk egy tagot. A maradék számok átlaga 52,4 lett. Hány tagú volt eredetileg a sorozat és melyik számot vettük ki?
16. Igaz-e, hogy egy mértani sorozat minden második tagja is mértani sorozatot alkot? Igaz-e, hogy egy mértani sorozat minden harmadik tagja is mértani sorozatot alkot? Hogyan általánosíthatunk?
- $a^b = b \cdot \ln a$, $a^b = b \cdot \ln a$
17. Egy (a_n) mértani sorozat harmadik tagja 12, hetedik tagja 192. Határozzuk meg a sorozat kezdőtagját és hányadosát!
- $a_3 = 12$, $a_7 = 192$
18. Egy (a_n) mértani sorozatban $a_4 = -8$, $a_{11} = -64 \cdot \sqrt{2}$. Határozzuk meg a_{2005} és a_n értékét!
- $a_4 = -8$, $a_{11} = -64 \cdot \sqrt{2}$, $a_{2005} = \dots$, $a_n = \dots$
19. Egy mértani sorozat első tagja 7, kvóciense 2.
- a) Szerepel-e a sorozatban 10-nek valamely hatványa?
- Nem
- b) Hány hárommal osztható szám szerepel a sorozatban?
- 0
- c) A sorozat tagjai között hány tízjegyű szám van?
- 3
20. Egy mértani sorozat harmadik és hetedik tagja is 5. Határozzuk meg az első 10 tag összegét!
- 50 vagy 0
21. Egy gyáregység termelése havonta az előző havi termelés 1%-ával nő.
- a) Hány százalékkal emelkedik a termelés egy év alatt?
- 12,7%
- b) Hány hónap alatt kétszereződik meg a termelés?
- 70 hónap
22. Egy irodai eszköz beszerzési ára 85 000 Ft. Mekkora értékkel tartják nyilván a leltárban 5 év múlva, ha félévente 5%-kal csökken az értéke?
- 50 893 Ft
23. Mennyi az $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{100}$ értéke?
- $2^{101} - 1$
24. Egy mértani sorozat első négy tagjának összege 40, a második, harmadik, negyedik, ötödik tag összege pedig 120. Melyik ez a sorozat?
- $a = 1$, $b = 3$
25. Egy mértani sorozat első hét tagjából az első három elem összege 26, a három utolsó elem összege pedig 2106. Mennyi a hét tag összege?
- 2186

26. Egy mértani sorozat ötödik tagja 10. Mennyi az első kilenc tag szorzata? 10⁹
27. Egy papírlap vastagsága 0,1 mm.
- a) Hányszor kellene félbehajtanunk, hogy felülete legalább ezredrészére csökkenjen? 10
- b) Elméletileg legalább hányszor kellene félbehajtanunk a papírt, hogy a hajtogatás után elérje a Föld-Hold távolságot? (kb. 384 ezer km) 42
28. A normál A hang frekvenciája 440 Hz, az egy oktávval magasabbé pedig 880. Az oktávhoz tartozó félhangok frekvenciát megkaphatjuk, ha ezt a hangközt 12 részre osztjuk úgy, hogy az egyes frekvenciák mértani sorozatot alkossanak. Mekkora az egyes félhangok frekvenciája? 440, 466, 494, 523, 554, 587, 622, 659, 698, 740, 784, 831, 880
29. Három szám egyszerre alkot mértani és számtani sorozatot is. Határozzuk meg az összes ilyen tulajdonságú számhármast. egyenlő számok
30. Egy számtani és egy mértani sorozatnak közös az első és a második eleme; a mértani sorozat harmadik eleme 1-gyel nagyobb a számtani sorozat harmadik eleménél, és 3-mal nagyobb a mértani sorozat első eleménél. Írjuk fel mindkét sorozat első három elemét. 1, 2, 3 ill. 1, 2, 4
31. A papucsállatkák átlagban 27 óra alatt osztódnak ketté. Ha a szaporodásukat semmilyen külső tényező nem befolyásolná, mennyi időre lenne szükség ahhoz, hogy egyetlen papucsállatka utódainak térfogata egyenlő legyen a Föld térfogatával? (A papucsállatkák 40. generációja összegyűjtve kb. 1 m^3 térfogatú; a Föld térfogata kb. $1 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$) kb. 124 nap
32. Három pozitív szám egy mértani sorozat három szomszédos eleme. Ha a másodikhoz hozzáadunk négyet, egy számtani sorozat három egymás utáni tagját kapjuk. Végül, ha ezután a harmadik tagot 32-vel növeljük, ismét egy mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Melyik ez a három szám? 2, 6, 18, vagy $\frac{6}{2}$, $-\frac{6}{10}$, $-\frac{6}{50}$
33. Egy légritkító szivattyú a dugattyú minden felhúzásakor 8%-kal csökkenti az edényben lévő levegő nyomását. Az eredeti nyomás az edényben 10^5 Pa .
- a) Mekkora lesz a nyomás a dugattyú 20 felhúzása után? 18869,3 Pa
- b) Hányszor kell felhúzni a dugattyút ahhoz, hogy az edényben a nyomás 100 Pa legyen? ≈ 83-szor
34. Egy háromszög oldalai mértani sorozatot alkotnak.
- a) Milyen értékeket vehet fel a sorozat hányadosa? $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- b) Lehet-e derékszögű a háromszög? Lehet.
35. Egy számtani sorozat első tagja 7, a differenciája -4. Mennyi az sorozat 100. eleme? -389

36. Egy trapéz alakú nézőtér első sorában 20 szék van, majd minden további sorban eggyel több. Összesen 22 sor van a nézőtéren. Hány ülőhely van? 129
37. Egy trapéz alakú nézőtér első sorában 10 szék van, majd minden további sorban kettővel több. Hány sor szék van a nézőtéren, ha az ülőhelyek száma 252? 21
38. Egy 15 soros moziterem 4. sorában 12-en férnek el. Minden sorban 3-mal többen, mint az előtte levőben. Hányan férnek el a moziban? 098
39. Egy érdekes könyvből első nap 8 oldalt olvasunk el, majd minden további napon 1,5 oldallal többet. Hány nap alatt olvassuk ki a 270 oldalas könyvet? 15
40. Egy színházi nézőtéren 560-an férnek el. A 10. sorban 45-en, és minden sorban 2-vel többen, mint az előtte levőben. Hány sor van a színházban? 14
41. Egy dolgozó 28 éves korában 78 000 Ft-ot keres. Minden évben kap 4000 Ft-os fizetésemelést. Mennyit fog keresni 40 éves korában? 126 000 Ft
42. Egy könyvespolc legalsó polcán 30 könyv van. Minden további polcon 1-gyel kevesebb, mint az alatta levőn. Hány könyv van ebben a 8 polcos szekrényben? 298
43. Egy 500 000 Ft összdíjazású versenyen az első 10 helyezettet jutalmazzák. András, aki a 6. helyen végzett, 48 000 Ft-ot kapott. A jutalmak egy számtani sorzatot alkotnak. Hány Ft-ot kapott az első helyezett? 64 000 Ft
44. Egy biciklis 735 km-t szeretne megtenni. A 10. napon 45 km-t tesz meg, továbbá tudjuk, hogy minden nap 2 km-rel kevesebbet, mint az előzőben. Hány km-t tesz meg az utolsó napon? 33 km
45. Egy baktériumtenyészetben kezdetben volt 3 baktérium. A tenyészetben a baktériumok száma minden negyed órában megduplázódik. Hány baktérium lesz a tenyészetben 2 óra múlva? 768
46. Bankba helyezünk 50 000 Ft-ot évi 6,5%-os kamatos kamatra. Mennyi pénzünk lesz 5 év múlva, ha közben a kamat nem változik, mi pedig nem nyúlunk a pénzhez? 68 504 Ft
47. Egy érdekes könyvből első nap 16 oldalt olvasunk el, majd minden további napon 1,5-szer annyit, mint az előző nap. Hány oldalas a könyv, ha 5 nap alatt elolvassuk? 211
48. Egy dolgozónak minden évben 4%-kal emelik a fizetését. Mennyit kereshetett pályakezdőként, ha 10 éves munkaviszony után 180 000 Ft a fizetése? 126 466 Ft
49. Egy baktériumtenyészetben minden nap megduplázódik a baktériumok száma. Kezdetben volt 1 baktérium. Hány nap múlva lesz 256 baktérium a tenyészetben? 8
50. Mennyi pénzt helyezünk el a bankban évi 7,2%-os kamatos kamatra, ha 4 év múlva 70.000 Ft-ot szeretnénk felvenni? 53 055 Ft
51. Egy dolgozó minden évben 5%-os fizetésemelést kap. 3 éves munkaviszony után a keresete 140 000 Ft volt. Mennyit keresett ennél a cégnél az 5 éves munkaviszonya alatt? (Havonta kap fizetést!) 8420 000 Ft

52. Egy gyáregység termelése havonta az előző havi termelés 1%-ával nő.

a) Hány százalékkal emelkedik a termelés egy év alatt?

12,68%

b) Hány hónap alatt kétszereződik meg a termelés?

70

53. 10 évre vonatkozóan összehasonlították két vállalat termelését. Kezdetben az I. vállalat termelése 100 egység, a II. vállalaté 80 egységnyi volt. Az I. vállalat termelése félevenként 3%-kal nőtt, a II. vállalaté félevenként 5%-kal.

a) Utolérte-e a II. vállalat termelése az I. vállalatét? Jelenleg melyik termel többet?

Utolérte.

b) Melyik vállalat termelt többet a 10 év alatt?

I. vállalat

54. 10 évre vonatkozóan összehasonlították két vállalat termelését. Kezdetben mindkét vállalat termelése egyenlő volt, s a 10. év végére mindkét vállalat megduplázta a termelését. Az I. vállalat termelése évente mindig ugyanannyival növekedett, a II. vállalat termelése minden évben ugyanannyi százalékos volt.

a) Mutassuk meg, hogy az I. vállalat többet termelt a 10 év alatt!

1550 III. 1493,3

b) Azonos ütemű fejlődést feltételezve, hány év múlva „előzi meg” a II. vállalat össztermelése az I. vállalatét?

15. évben

55. A község három élelmiszerboltjának üzleti forgalmáról tudjuk, hogy a felső bolt forgalma 15%-kal több, az alsóé 30%-kal kevesebb, mint a középsőé. Hány százaléka az alsó bolt forgalma a felsőének?

60,87%

56. Mennyit fizetnek ki június 10-én 2 800 000 Ft-ra, amit 7%-os évi kamatra tettünk be január 1-jén? (Legyen az évközi kamat „egyszerű kamat” és minden hónap 30 napos.)

2 887 111 Ft

57. Hány év alatt növekszik egy 100 000 Ft értékű betét 1 000 000 Ft értékűre, ha évi 15%-os kamattal számolunk?

kb. 17 év alatt

58. Mekkora a kamatláb, ha a bútóvásárlásnál 366 000 Ft kölcsön után öt hónapra 27 450 Ft kell fizetnünk? (Legyen az évközi kamat „egyszerű kamat”, és minden hónap 30 napos.)

18%

59. Egy értékpapírt, amelyik 5 év múlva fizet 1 000 000 Ft-ot, ma vettünk meg 500 000 Ft-ért. Mekkora éves átlaghozamot jelent ez a befektetés számunkra, ha az értékpapírt lejáratig megtartjuk?

14,87%

60. Hány év alatt duplázódik meg 8%-os kamatláb mellett

a) 3000 Ft

b) 2 500 000 Ft?

kb. 9 év, összegtől függetlenül

61. Mekkora összeget kap két év múlva az, aki most köti le 50 000 forintját fix 12%-os kamatos kamatra?

88 117 Ft

62. Mekkora összeget helyezzen el a 2 éves futamidejű, évi 12%-os fix kamatos kamatozású takaréklevélibe az, aki a második év végén 500 000 Ft-ot akar kapni?

398 597 Ft

63. Legalább mekkora éves átlaghozammal kell befektetni 400 000 forintot, hogy 10 év múlva ki tudjunk fizetni 1 000 000 forintot? És ha csak 100 000 forintot fektetünk be?

25,9%

64. 50 000 forintot szeretnénk 7 évre befektetni. Három befektetés közül választhatunk:

- a) minden év végén hozzátesznek a pénzünkhöz egy fix összeget, 7500 forintot, ami az eredeti összeg 15%-a;
- b) 11%-os kamatot fizetnek;
- c) az első évben 17% kamatot kapunk, majd évente 2%-kal csökken, míg eléri a 7%-ot, és ennyit kamatozik az utolsó évben is.

Melyik befektetés a legkedvezőbb?

102 500 Ft, 103 808 Ft, 105 505 Ft

65. Hány éven át kell évi 50 000 forintot befizetni, ha az utolsó befizetés utáni év végén 1 millió forinttal akarunk rendelkezni? Az éves kamatláb 12%.

11

66. Minden év elején 450 000 forintot helyezünk el a bankban, éves 6,5%-os kamatra.

a) Mennyi pénz gyűlik össze a 6. év végére?

3 385 291 Ft

b) Hány év alatt gyűlik össze 6 millió Ft?

9,45

67. Mekkora összeget kell 5 éven át minden év elején a bankban elhelyeznünk évi 15%-os kamat mellett, ha azt akarjuk, hogy az ötödik év végén ugyanannyi legyen a követelésünk, mintha az első év elején egyszerre 300 000 forintot tettünk volna be ugyanekkora kamatra?

77 821 Ft

68. 1 000 000 Ft-os hosszú lejáratú kölcsönt vettünk fel, évi 8%-os kamatra. A törlesztő részlet minden év végén 100 000 Ft.

a) Hány év alatt fizetjük vissza a tartozást?

21

b) Összesen mekkora a visszafizetett összeg?

Kb. 2 100 000

69. Mennyi hitelt vehetünk fel 10 év futamidőre, ha a kamat 12%, és csak évi 600 000 Ft-ot tudunk törleszteni? Mekkora összeget fizettünk vissza?

≈ 3 390 000 Ft, 6 000 000 Ft

70. Mennyi az évi törlesztőrészlet, ha 10 000 000 Ft hitelt vettünk fel évi 8%-os kamatra 15 évre?

1 168 295 Ft

Mennyi lesz a törlesztőrészlet, ha 9%-os a kamat?

1 240 588 Ft

És ha 20 évre vesszük fel (8%-kal)?

1 018 522 Ft

Mennyivel többet fizetünk vissza, ha 20 évre vesszük fel, mintha 15 évre vennénk?

≈ 2 846 000 Ft-tal

71. Hány év alatt fizetjük vissza azt a hitelt, amelynél a felvett pénz 3 600 000 Ft, a kamat 18% és a törlesztőrészlet évi 900 000 Ft?

8 év alatt ($\approx 7,7$)

És ha a kamat 23%?

Több, mint 12 év alatt ($\approx 12,2$)

72. Mikor kell befektetnie annak a szülőnek, aki azt szeretné, hogy gyermeke 25 éves korában egymillió forintot kapjon, ha évi 10%-os átlaghozammal számol, és

a) egyszeri induló befektetésként;

a gyerekek 12 éves korában

b) minden év elején 50 000 Ft-ot tud befektetni?

13 éves kortól