Lineáris egyenletrendszerek, determináns

- ⋆ lineáris egyenletrendszer: több egyenlet, több ismeretlen. Lineáris: az ismeretlenek csak első hatványon szerepelnek (tehát nincs $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, x^4, stb.)
  - ∗ általában az *egyenletek és az ismeretlenek száma megegyezik.* Ekkor legtöbbször egy megoldás van. Speciális esetekben lehet nulla illetve végtelen sok megoldás. Tehát kettő, három, stb. megoldás *nem* lehetséges.
  - ∗ Ha kevesebb az egyenlet, mint az ismeretlen, akkor legtöbbször valami trükk van (pl. csak egész számok halmazán keressük a megoldásokat).
- ⋆ megoldása: középszintű érettségin a *két egyenlet, két ismeretlen* a legtöbb, ami követelmény. A lentebb részletezett *algebrai* módszereken kívül lehetséges még *grafikusan* is megoldani (mindkét egyenletből az y-t kifejezve lényegében egy-egy függvényt kapunk, amit *közös* koordináta rendszerben ábrázolunk, és a metszéspontjuk x koordinátája adja az x, az y koordinátája pedig az y értéket).
  - ∗ *egyenlő együtthatók módszere*: az egyik ismeretlen együtthatói a két egyenletben egymás ellentettjei. Ekkor a két egyenletet összeadva ez az ismeretlen kiesik, marad egy egyenlet, egy ismeretlen.
    - ∗ érdemes a két egyenletet inkább összeadni, mint kivonni: könnyű az előjeleket a kivonáskor eltéveszteni
    - ∗ a $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=8 \\ 3x-4y=-5 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer megoldása:
      1. az első egyenletet 4-gyel, a másodikat 3-mal beszorozva: $\left.\begin{array}{l} 8x+12y=32 \\ 9x-12y=-15 \end{array}\right\}$
      2. az y együtthatója az első egyenletben 12, a másodikban -12. Ha összeadjuk őket, akkor az y kiesik: $17x=17$, azaz $x=1$.
      3. valamelyik (mondjuk az első) egyenletbe az x helyére 1-et írva: $2+3y=8$, azaz $y=2$.
  - ∗ *behelyettesítő módszer*: valamelyik egyenletből az egyik ismeretlent kifejezzük, és a másik egyenletbe behelyettesítjük
    - ∗ érdemes úgy kifejezni, hogy véges tizedes törteket kapjunk (könnyebb vele számolni). Tehát nem érdemes 3-mal, 6-tal, 7-tel, stb. osztani.
    - ∗ a $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=8 \\ 3x-4y=-5 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer megoldása:
      1. az első egyenletből kifejezzük x-et (az együtthatója 2, amivel egész számot (vagy véges tizedes törtet) osztva nem kapunk végtelen tizedes törtet): $x=4-1,5y$
      2. a *másik* egyenletbe *behelyettesítjük* az x helyére a $4-1,5y$-t: $3\cdot(4-1,5y)-4y=-5$, amit y-ra megoldva: $y=2$.
      3. Az első lépésben kifejezett x-et kiszámolhatjuk az y segítségével: $x=4-1,5\cdot 2=1$
- ⋆ háromismeretlenes egyenletrendszer
  - ∗ megoldása hasonló módon, mint kétismeretlenes esetben
    - ∗ egyenlő együtthatók módszere: amikor egy egyenletet „veszítünk”, akkor „veszítsünk” egy ismeretlent is. Azaz az ismeretlenek száma mindig legyen ugyanannyi, mint az egyenletek száma.
    - ∗ behelyettesítő módszer: legtöbb esetben kétszer kell egymás után végrehajtani a lépést (pl. először az x-et fejezem ki az első egyenletből és írom be a második *és* harmadik egyenletbe, ezután az y-t fejezem ki,...).
  - ∗ a legegyszerűbb és kb. mindig működő módszer a *behelyettesítő módszer.* Legtöbbször ezt ajánlom, mintsem bűvészkedni, hogy hogyan lehet kiejteni ismeretleneket.
- ⋆ determinánsok (nem érettségi követelmény!)
  - ∗ 2×2-es eset: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$, azaz a főátlóbeli (ÉNy-DK irány) elemek szorzatából kivonjuk a mellékátlóbeli (ÉK-DNy irány) elemek szorzatát.
  - ∗ 3×3-as eset: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ determinánst
    1. „kibővítjük”, hogy könnyebben legyen követhető: az első két oszlopot a determináns után írjuk: $\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right.$
    2. az ÉNy-DK irányú („főátló”), 45°-os egyenesek mentén levő 3-3 számokat összeszorozzuk, és ezeket összeadjuk: $aei+bfg+cdh$
    3. az ÉK-DNy irányú („mellékátló”), 45°-os egyenesek mentén levő számokat összeszorozzuk és összeadjuk: $ceg+afh+bdi$
    4. a kettő összeget egymásból kivonjuk: $aei+bfg+cdh-ceg-afh-bdi$
- ⋆ egyenletrendszer megoldása determinánsokkal
  1. kiszámoljuk az együtthatókból alkotott determinánst (2×2-es vagy 3×3-as), jelöljük D-vel.
  2. kiszámoljuk azokat a determinánsokat is, amelyeket úgy kapunk, hogy az x együtthatóit az egyenletrendszer jobb oldalán álló konstansokra cseréljük. Jelöljük D_x-szel.
     Hasonlóan D_y (és D_z) is számolható.
  3. az egyenlet megoldása: $x=\frac{D_x}{D}$; $y=\frac{D_y}{D}$; $z=\frac{D_z}{D}$, stb.
  4. természetesen ha $D=0$, akkor 0 vagy végtelen sok megoldás van.

  Például a $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=8 \\ 3x-4y=-5 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer megoldása:
  1. $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4)-3\cdot 3=-17$
  2. $D_x=\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = 8\cdot(-4)-(-5)\cdot 3=-17$, illetve
     $D_y=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-5)-8\cdot 3=-34$
  3. $x=\frac{D_x}{D}=\frac{-17}{-17}=1$ és $y=\frac{D_y}{D}=\frac{-34}{-17}=2$