Függvények (9. évfolyam)

- ⋆ alapfogalmak
  - ∗ függvény („konyhanyelven"): olyan hozzárendelés, amely mindenhez *legfeljebb* egy elemet rendel
  - ∗ tulajdonságok (függvényelemzés szempontjai)
    - ∗ értelmezési tartomány: az x-tengelyről olvasható le
    - ∗ értékkészlet: az y-tengelyről olvasható le
    - ∗ zérushely: ahol a függvény helyettesítési értéke nulla, azaz azon x-ek, ahol $f(x) = 0$. A függvény grafikonja a zérushelyekben metszi (vagy érinti) az x-tengelyt
    - ∗ monotonitás
      - · monoton növekedő: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, azaz nagyobb x-hez nagyobb *vagy egyenlő* („nem kisebb") függvényérték tartozik.
        A grafikon (balról jobbra) növekedik vagy állandó (vízszintes).
      - · monoton csökkenő: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, azaz nagyobb x-hez kisebb *vagy egyenlő* („nem nagyobb") függvényérték tartozik.
        A grafikon (balról jobbra) csökken vagy állandó (vízszintes).
      - · szigorúan monoton növekedő: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, azaz nagyobb x-hez nagyobb függvényérték tartozik.
        A grafikon (balról jobbra) növekedik.
      - · szigorúan monoton csökkenő: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ azaz nagyobb x-hez kisebb függvényérték tartozik.
        A grafikon (balról jobbra) csökken.
    - ∗ szélsőértékek
      - · maximum vagy minimum (legnagyobb vagy legkisebb) helyettesítési érték
      - · lokális vagy globális (csak egy adott környezetben vagy az egész értelmezési tartományra nézve)
    - ∗ paritás
      - · páros, ha minden x-re $f(x) = f(-x)$, azaz bármely számhoz ugyanazt rendeli, mint a szám ellentettjéhez.
        Grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y-tengelyre.
      - · páratlan, ha minden x-re $f(-x) = -f(x)$, azaz bármely szám ellentettjéhez tartozó helyettesítési érték megegyezik a számhoz tartozó helyettesítési érték ellentettjével.
        Grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra.
      - · Lehet olyan függvény is, amely se nem páros, se nem páratlan.

- ⋆ alapvető függvénytípusok

név	általános alak	grafikon	
lineáris	$m \cdot x + b$ $(m, b \in \mathbb{R})$	egyenes	két pontja egyértelműen meghatározza
abszolútérték	$\lvert x \rvert$	V-alak	
másodfokú	$ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$	parabola	egyet jobbra, egyet fel; egyet jobbra, hármat fel; egyet jobbra, ötöt fel;...
lineáris törtfüggvény	$\frac{1}{x}$	hiperbola	
négyzetgyök	$\sqrt{x}$	elforgatott fél-parabola	egyet jobbra, egyet fel; hármat jobbra, egyet fel; ötöt jobbra, egyet fel;...

- ⋆ ábrázolás
  - ∗ elsőfokú
    - ∗ az m a meredekség, azaz 1-et jobbra, m-et fel
    - ∗ az y-tengelyt b-nél metszi
    - ∗ az x-tengelyt $-\frac{b}{a}$-nál metszi („zérushely")
  - ∗ másodfokú
    - ∗ az $x^2 + bx + c$ alakot nevezetes azonossággal átalakítjuk: $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$, pl. $x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 - 9 + 10 = (x + 3)^2 + 1$
    - ∗ az $ax^2 + bx + c$ alakban először kiemelünk a-t, és utána az előző pont
    - ∗ ha $a > 0$, akkor a parabola felfelé nyílik, ha $a < 0$, akkor lefelé
  - ∗ lineáris törtfüggvény
    - ∗ függvénytranszformációkor az aszimptotákat érdemes tologatni
    - ∗ $\frac{ax + b}{cx + d}$ esetén az „egészeket" leválasztjuk, pl.
      $\frac{3x + 7}{x - 2} = \frac{3 \cdot (x - 2) + 6 + 7}{x - 2} = \frac{3(x - 2)}{(x - 2)} + \frac{13}{x - 2} = 3 + \frac{13}{x - 2}$
    - ∗ ekkor az aszimptotákat feltoljuk 3-mal és 2-vel jobbra toljuk
    - ∗ az aszimptoták metszéspontjából egyet megyünk jobbra és $+13$-at fel (illetve ugyanígy balra és le)
  - ∗ abszolútérték
    - ∗ ha több abszolútérték szerepel, akkor részekre bontjuk (eggyel több részre, ahány abszolútérték van). Pl. $|x + 1| - |x - 2|$:
      - · meghatározzuk, hogy az abszolútérték*ben* levő kifejezések mikor nullák ($x + 1 = 0$ ill. $x - 2 = 0$ egyenletek megoldása)
      - · három tartomány: $x < -1$, $-1 < x < 2$, $2 < x$
      - · első tartomány ($x < -1$): $x + 1 < 0$, $x - 2 < 0$. Az abszolútérték-jeleket zárójelre „cseréljük", és ha a benne levő kifejezés negatív, akkor a zárójelen kívül előjelet váltunk (most mindkét tag esetében): $-(x+1) + (x-2) = \ldots = -3$
      - · második tartomány ($-1 < x < 2$): $x+1 > 0$, $x-2 < 0$, ekkor a második tag előjele változik: $(x+1)+(x-2) = \ldots = 2x-1$
      - · harmadik tartomány ($2 < x$): $x + 1 > 0$, $x - 2 > 0$, egyik előjelet se váltjuk: $(x + 1) - (x - 2) = 3$

- ⋆ függvénytranszformációk
  - ∗ $f(x) + c$ esetén az eredeti függvényt $+c$-vel felfele toljuk. Pl. $x^2 + 3$ esetén az x^2 függvényt 3-mal felfele.
  - ∗ $f(x + c)$ esetén az eredeti függvényt $+c$-vel *balra* toljuk (tehát pont ellenkező irányba). Pl. $(x + 3)^2$ esetén 3-mal balra.
  - ∗ $-f(x)$: x-tengelyre való tükrözés
  - ∗ $f(-x)$: y-tengelyre való tükrözés
  - ∗ $c \cdot f(x)$: függőleges nyújtás c-szeresre (az x-tengelyen maradnak a metszéspontok)
  - ∗ $f(c \cdot x)$: vízszintes összenyomás c-szeresre (az y-tengelyen marad a metszéspont)
  - ∗ $|f(x)|$ esetében az x-tengely *alatti* részt (fel)tükrözzük az x-tengelyre