Egyenletek, egyenlőtlenségek típusai, megoldási módok

Az $f(x)$ és $g(x)$ mindenhol valami x-es kifejezést jelöl!

Törtes egyenlőtlenség

Először is: ismeretlent tartalmazó kifejezéssel *egyenlőtlenséget* csak legvégső elkeseredésben szorzunk, ui. negatív számmal való szorzás ill. osztás esetén az egyenlőtlenség iránya megfordul – honnan tudod, hogy az a kifejezés nem-e negatív?

Megoldás:

1. számlálót és nevezőt szorzattá alakítjuk
2. nullára redukáljuk – sokszor szokott kelleni közös nevezőre hozás (ekkor ne feledjük, hogy ahol törtvonal van, oda a közös törtvonalon zárójel kell)
3. számegyeneses ábrázolás (szaggatott vonal, folytonos vonal, üres karika, teli karika, stb.)

Ahány különálló részre esik szét a tartomány, annyi különálló egyenlőtlenség kell.

Abszolútértékes egyenlet

Két eset van: ha $|f(x)| = c$ (ahol $c \in \mathbb{R}$ - tehát valami szám), akkor:

1. $f(x) = c$ - megoldod
2. $f(x) = -c$ - megoldod

Ha olyan, hogy $|f(x)| = g(x)$, akkor:

1. $f(x) = g(x) \Rightarrow$ megoldod
2. $f(x) = -g(x) \Rightarrow$ megoldod

Nagyon fontos: *mindenféleképpen ellenőrizni*!!

Másodfokú egyenlőtlenség

Megoldás:

1. nullára redukáljuk
2. meghatározzuk a zérushelyeket (másodfokú egyenlet megoldóképlete)
3. vázoljuk a parabolát (felfelé nyílik, lefelé nyílik, stb.)
4. az x-tengelymetszetek lesznek a zérushelyek
5. leolvassuk, melyik részen pozitív vagy negatív (ahány különálló rész a grafikonon, annyi különálló egyenlőtlenség lesz)

Elképzelhető, hogy nincs zérushely, azaz a parabolának *nincs* közös pontja az x-tengellyel. Ekkor felfelé nyíló parabola esetén a parabola az x-tengely *felett*, különben az x-tengely *alatt* helyezkedik el. Ekkor minden érték pozitív ill. negatív.

Négyzetgyökös egyenlet

Általában $\sqrt{f(x)} = g(x)$ alakú, tehát nincs benne két gyökjel. Megoldás:

1. gyökjel egyik oldalra, többi a másik oldalra
2. négyzetreemelés (*nevezetes azonosság!!!*) - mindig úgy csinálod, hogy a négyzetgyökjel „eltűnik”, a másik oldalt *zárójelbe* rakod, rá a négyzet-jel, és csak a következő lépésben végzed el a négyzetreemelést
3. további megoldás
4. ellenőrzés különösen fontos!!!

Trigonometrikus egyenlet

Valamilyen szögfüggvénye szerepel az ismeretlennek (sin, cos, tg).

A fő cél, hogy egyfajta szögfüggvény legyen. Ehhez általában azonosságokat használunk. Ha van az egyenletben $\sin^2$ vagy $\cos^2$, akkor szinte biztos, hogy másodfokúra visszavezethető egyenletről van szó, és a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot kell használni.

Gyökcsoportokat, periódusokat, $k \in \mathbb{Z}$-t nem felejt!

Logaritmusos egyenlet

Kikötés nagyon fontos, pont járhat érte (aminek a logaritmusát vesszük, csakis pozitív lehet).

Logaritmus azonosságaival olyan alakra hozzuk, hogy $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ – tehát mindkét oldalon egy-egy kifejezés logaritmusa szerepel, SEMMI MÁS!

Ezután „log. fgv. szig. mon. miatt”, $f(x) = g(x)$, és oldjuk tovább.

Elképzelhető *másodfokúra visszavezethető* logaritmusos egyenlet is, azaz valamilyen $\log_a^2$ szerepel. Ekkor a szokásos $y = \log_a f(x)$, y-ra megold, majd *visszaír*!

Szokásos dolog, ha az egyik oldalon egy szám szerepel, és azt át kell írni logaritmusra: $b = \log_a a^b$ - tudjuk, nem gondolkodik, ész nélkül átír! Pl. $3 = \log_4 4^3$.

Exponenciális egyenlet

Az első gondolat: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ alakra hozni. Ilyen inkább csak a rövid részben van (ekkor „exp. fgv. szig. mon. miatt” után $f(x) = g(x)$). Hasonlóan, mint a logaritmus esetén itt is mind a két oldalon *egy-egy* hatvány szerepeljen! Tehát „a a valahanyadikon” egyenlő „a a másvalahanyadikon”.

Azonosak az alapok, a kitevők különböznek, de minden esetben „ugyanannyiszor x”, pl.: 5^x és 5^{x+1} és 5^{x+2}, azaz *nincs* $2x$, $3x$, stb. Megoldás:

1. legkisebb kitevőt kiválasztjuk, és a többit ilyenre írjuk át, pl. $5^{x+2} = 5^x \cdot 5^2$
2. az $5^x \cdot 5^2$-szerűeket „kiszámoljuk”: $25 \cdot 5^x$
3. értékeket összeadjuk: $5^x + 5 \cdot 5^x + 25 \cdot 5^x = 31 \cdot 5^x$
4. osztunk (esetünkben 31-gyel)
5. jó esetben a másik oldalon 5-nek egy egész kitevős hatványa áll

Klasszikus eset a másodfokúra visszavezethető exponenciális egyenlet. Ismertetőjegyei:

- különböző alapok vannak, de azok közül egyik a másiknak négyzete (pl. 5^x és 25^x és hasonlóak)
- azonos alapok, de az egyik kitevő a másiknak duplája (pl. 5^{x+1} és 5^{2x+2}), illetve majdnem a duplája, csak egy szám különbség van, ekkor az azonos kitevőre hozás esetét kell használni