

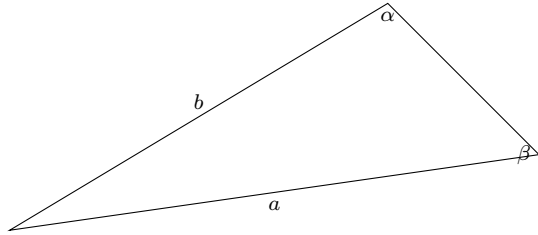
## Színusz- és koszinusztétel összefoglaló

$$\star T_{\Delta} = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$$

★ színusz-tétel

\* bármely háromszögben két (vagy akár három) oldal aránya megegyezik az oldalakkal szemközti szögek színuszainak arányával

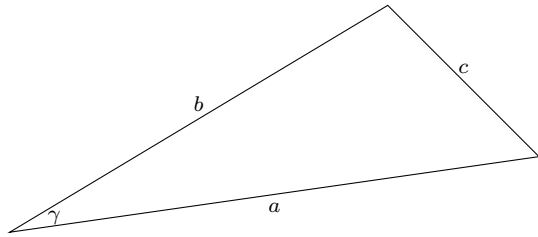
$$\star \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$



\* ha a három oldal arányával akarunk számolni:  $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$

★ koszinusz-tétel

$$\star c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$



\* fontos: a  $\gamma$  a  $c$  oldallal szemközti szög (azaz az egyenlet bal oldalán szereplő oldallal szemközti szög koszinusza szerepel az egyenlet jobb oldalán)

★ feladatok megoldásához általános tanácsok

\* a színusztételben két oldal és két szög szerepel, amelyből optimális esetben egy adatot nem ismerünk

\* a koszinusztételben mindhárom oldal és egy szög szerepel, amelyből optimális esetben egy adatot nem ismerünk

\* ha a színusztétel segítségével határozzuk meg az egyik szöveget, akkor két érték lehetséges:

\* amit a számológép visszaad,

\* illetve  $180^\circ$ -ból kivonva (ld. trigonometrikus egyenletek).

Elképzelhető, hogy egyéb okok miatt ez a szög nem megfelelő (pl. tudjuk, hogy a háromszög hegyesszögű; ismerünk már egy másik szöveget, és a kettő összege eléri a  $180^\circ$ -ot (háromszög belső szögeinek összege)). Viszont ezt az értéket is fel kell írni, és ha nem megfelelő, megindokolni (pontot ér!).

\* koszinusz-tétel esetén ha nem ismerjük a szöveget, akkor az utolsó (koszinusz) tagot *nem* tudjuk összevonni a többivel:  $4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \gamma$  esetén csak a  $4^2$ -t és az  $5^2$ -t tudjuk összeadni, a  $2 \cdot 4 \cdot 5$ -öt nem, hisz ott van még a  $\cos \gamma$  (hasonlóan a  $4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot x = 16 + 25 - 40x = 41 - 40x$  esetén az  $x$ -es tagot nem vonhatjuk össze a többivel)

★ (némileg) összetettebb feladattípusok

\* háromszög területét és a szögeit ismerjük

\* színusztétel:  $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$

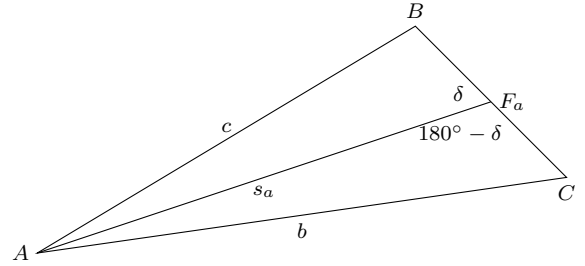
\* konkrét adatot kapunk a  $a : b : c$  arányra

\* ekkor  $a = \dots x, b = \dots x, c = \dots x$

\*  $K = a + b + c = \dots x + \dots x + \dots x$

\*  $x = \dots$

\* súlyvonal: háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz



\* ha adott (vagy épp ez a kérdés) a súlyvonal és a „szemközti” oldal által bezárt szög ( $\delta$ ), akkor a két kis háromszöget ( $ACF_a\Delta, ABF_a\Delta$ ) külön-külön érdemes kezelni (megadott adatoktól függően színusz- vagy koszinusztétel)

\* ha az oldalak adottak és a súlyvonal hossza a kérdés, vagy adott a súlyvonal hossza és valamely oldal a kérdés, akkor az  $ACF_a\Delta$  és az  $ABF_a\Delta$  háromszögekre felírjuk a koszinusztételt:

$$b^2 = s_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot s_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \delta$$

$$c^2 = s_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot s_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(180^\circ - \delta)$$

Mivel  $\cos \delta = -\cos(180^\circ - \delta)$ , a két egyenletet összeadva az utolsó (koszinusz) tagok kiesnek:

$$b^2 + c^2 = 2 \cdot s_a^2 + 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Ebből a három oldal ismeretében a súlyvonal hossza számítható, ill. két oldal és a súlyvonal hosszának ismeretében a harmadik oldal meghatározható.

\* ha az  $a$  oldal a kérdés, akkor praktikus ha az  $\frac{a}{2}$ -t (az  $a$  oldal felét) jelöljük ismeretlennel (pl.  $x$ -szel), így nem kell törteket használni

\* két oldal viszonyát ismerjük (pl. az egyik oldal 2 cm-rel hosszabb a másiknál...). Koszinusztétel esetén figyeljünk arra, hogy

\*  $(x+2)^2$ -t nevezetes azonosság segítségével bontsuk fel

\* ha ismerjük a szöveget, akkor érdemes minél hamarabb kiszámolni a koszinuszát

\* paralelogramma: általában az oldalak, átlók hossza és vagy valamely belső szög, vagy a két átló által bezárt szög vagy az egyik átló és oldal által bezárt szögek adottak ill. valamelyik meghatározása a feladat.

\* egy átló a paralelogrammát két háromszögre bontja (erre valamelyik tétel felírható)

\* szemközti oldalak egyenlő hosszúak, párhuzamosak

\* szomszédos szögek összege  $180^\circ$ , szemközti szögek egyenlők

\* a paralelogramma átlói felezik egymást

\*  $T = a \cdot b \cdot \sin \alpha$

\* a paralelogramma átlói *nem* merőlegesek (kivéve a rombusz)

\* a paralelogramma átlói *nem* szögfelezők (kivéve a rombusz)