Imolya Sándor Matematikaverseny

2015. május 4.

Kód

1.	2.	3.	4.	5.	Össz.

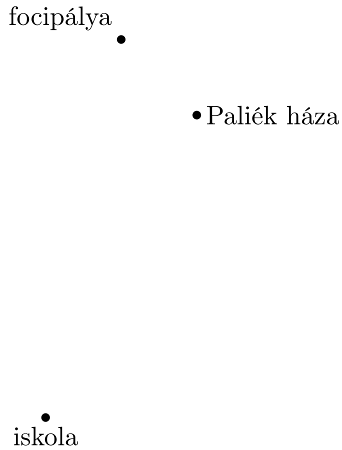
Kódszám:

1. Egy 30 fős osztály tanulóinak $\frac{2}{3}$ része közepesnél nem rosszabb tanuló, $\frac{3}{5}$ része közepesnél nem jobb tanuló. Hány közepes tanuló van az osztályban?

/**5 pont**

2. Paliék, Mátéék és Attiláék háza egy olyan egyenlő szárú háromszög kerületén van, amelyiknek az alapfelező pontján az iskola, az alappal szemközti csúcsában pedig a focipálya található. Az ábra alapján vázoljuk fel, hol lakhatnak Mátéék és hol Attiláék, ha házaik az egyenlő szárú háromszög alapjának két végpontjában helyezkednek el! A szerkesztés menetét is írd le!

/**8 pont**



3. Az $ABCD$ konvex négyszög A csúcsánál derékszög van. Számítsuk ki a többi csúcsnál lévő szögeket, ha tudjuk, hogy az AC átló egy egyenlő oldalú és egy egyenlő szárú háromszögre osztja a négyszöget!

/10 pont

4. Igaz-e, hogy a $2012^{2012} + 2013^{2013} + 2014^{2014} + 2015^{2015}$ összeg osztható 10-zel? **/12 pont**

/**14 pont**

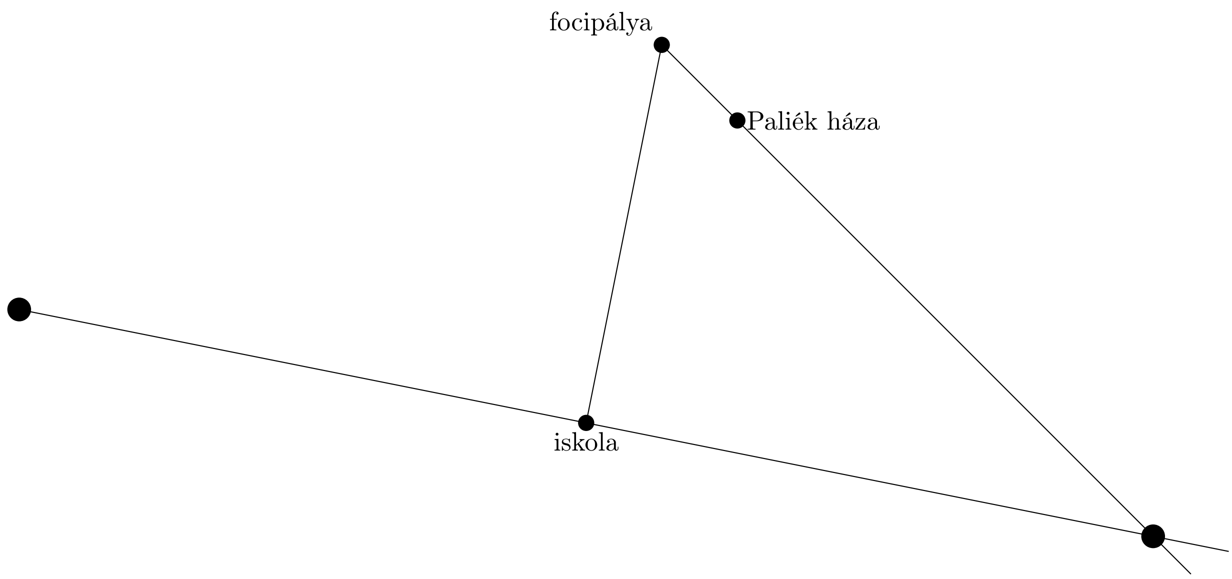
5. Egy külföldi nagyvárosban 2015 ház egyetlen sorban helyezkedik el. Minden ház után adót kell fizetni. Az első és az utolsó ház kivételével minden ház adója 1 euróval kevesebb, mint a két szomszédja által fizetett adó szorzata. Hány eurót fizetett a 2015 háztulajdonos összesen, ha az első ház adója 2 euró, a másodiké 3 euró?

Javítókulcs

1. Egy 30 fős osztály tanulóinak $\frac{2}{3}$ része közepesnél nem rosszabb tanuló, $\frac{3}{5}$ része közepesnél nem jobb tanuló. Hány közepes tanuló van az osztályban? **/5 pont**

$30 \cdot \frac{2}{3} = 20$ diák közepesnél nem rosszabb.	1 pont	1 pont	
$30 \cdot \frac{3}{5} = 18$ diák közepesnél nem jobb	1 pont	2 pont	
A hármasok mindkét halmazban szerepelnek.	1 pont	3 pont	Ha a megoldásból kiderül ez a gondolat, jár érte a pont.
Tehát a két szám összege annyival több az osztálylétszámnál, ahány hármas tanuló van.	1 pont	4 pont	
Tehát a hármas tanulók száma 8.	1 pont	5 pont	

2. Paliék, Mátéék és Attiláék háza egy olyan egyenlő szárú háromszög kerületén van, amelyiknek az alapfelező pontján az iskola, az alappal szemközti csúcsában pedig a focipálya található. Az ábra alapján vázoljuk fel, hol lakhatnak Mátéék és hol Attiláék, ha házaik az egyenlő szárú háromszög alapjának két végpontjában helyezkednek el! A szerkesztés menetét is írd le! **/8 pont**



Paliék házát összekötjük a focipályával.	1 pont	1 pont	
Ez lesz az egyenlő szárú háromszög egyik szárának egyenese.	1 pont	2 pont	
A focipályát és az iskolát összekötő egyenesre merőlegest állítunk az iskolán keresztül.	1 pont	3 pont	
Ez lesz az egyenlő szárú háromszög alapjának egyenese.	1 pont	4 pont	
A két egyenes metszéspontja az egyik ház.	1 pont	5 pont	
A metszéspontot tükrözve a szimmetriatengelyre, a másik házat kapjuk.	1 pont	6 pont	
Szerkesztés végrehajtása.	2 pont	8 pont	

3. Az $ABCD$ konvex négyszög A csúcsánál derékszög van. Számítsuk ki a többi csúcsnál lévő szögeket, ha tudjuk, hogy az AC átló egy egyenlő oldalú és egy egyenlő szárú háromszögre osztja a négyszöget! **/10 pont**

Az AC átló az ABC és az ACD háromszögeket hozza létre. Feltételezhető (az általánosság megszorítása nélkül), hogy az ABC háromszög szabályos, azaz a B csúcsnál $60°$-os szög van.	2 pont	2 pont	
Az ACD háromszög „egyenlő szárúságára” három eset van, az első, ha $AD = AC$.	1 pont	3 pont	
Ekkor a C és a D csúcsnál $\frac{180° - 30°}{2} = 75°$-os szög van.	1 pont	4 pont	
Azaz a négyszögben a C csúcsnál $60° + 75° = 135°$,	1 pont	5 pont	
a D csúcsnál pedig $75°$.	1 pont	6 pont	
Ha $AC = AD$, akkor a háromszögben a C csúcsnál $120°$ van,	1 pont	7 pont	
ami azt eredményezi, hogy a négyszögben a C csúcsnál $60° + 120° = 180°$ van, ami nem lehetséges.	1 pont	8 pont	
Utolsó esetként, ha $AD = DC$, akkor a D csúcsnál $120°$,	1 pont	9 pont	
míg a C csúcsnál (a négyszögben) $90°$ van.	1 pont	10 pont	

4. Igaz-e, hogy a $2012^{2012} + 2013^{2013} + 2014^{2014} + 2015^{2015}$ összeg osztható 10-zel? **/12 pont**

Csak az utolsó számjegyet kell figyelni.	1 pont	1 pont	
Az 5^{2015} $\left(2015^{2015}\right)$ 5-re végződik, mivel 5 minden hatványa 5-re végződik.	2 pont	3 pont	
A 4 hatványainak végződésében a 4, 6 végződés ismétlődik.	1 pont	4 pont	
Ezért a 2014^{2014} 6-ra végződik (páros kitevő).	1 pont	5 pont	
A 3 hatványaiban a 3, 9, 7, 1 ismétlődés figyelhető meg.	1 pont	6 pont	
Mivel a 2013 néggyel osztva 1 maradékot ad, így a 2013^{2013} 3-ra végződik.	2 pont	8 pont	
A 2 hatványainak végződései: 2, 4, 8, 6	1 pont	9 pont	
A 2012^{2012} végződése ezáltal 6.	1 pont	10 pont	
Az összeg végződése 0	1 pont	11 pont	
Tehát az összeg osztható 10-zel.	1 pont	12 pont	

5. Egy külföldi nagyvárosban 2015 ház egyetlen sorban helyezkedik el. Minden ház után adót kell fizetni. Az első és az utolsó ház kivételével minden ház adója 1 euróval kevesebb, mint a két szomszédja által fizetett adó szorzata. Hány eurót fizetett a 2015 háztulajdonos összesen, ha az első ház adója 2 euró, a másodiké 3 euró? **/14 pont**

A második ház 3 euró, ami eggyel kevesebb, mint az első és a harmadik szorzata, azaz a harmadik 2 eurót fizet ($2 \cdot 2 - 1 = 3$)	2 pont	2 pont	
A negyedik 1 eurót fizet.	1 pont	3 pont	
Az ötödik is 1 eurót.	1 pont	4 pont	
A hatodik 2 eurót.	1 pont	5 pont	
A hetedik 3 eurót.	1 pont	6 pont	
A nyolcadik 2 eurót.	1 pont	7 pont	
A kilencedik 1 eurót.	1 pont	8 pont	
A tizedik 1 eurót.	1 pont	9 pont	
A „2, 3, 2, 1, 1” ismétlődés felismerése.	2 pont	11 pont	Ha hamarabb felismerte az ismétlődést, és így kevesebb házra számolta ki a házadót, az azokra járó pontszámot adjuk meg!
$2015 : 5 = 403$ ismétlődés van.	1 pont	12 pont	
Ezért összesen $403 \cdot (2 + 3 + 2 + 1 + 1) = 403 \cdot 9$	1 pont	13 pont	
3627 euró adót fizetnek.	1 pont	14 pont	