35. Mikola verseny 2. fordulójának megoldásai

I. kategória, Gimnázium 9. évfolyam

1)

a)

A kerék kosarának sebessége legyen v_k, az elhajított kavicsok sebessége a kosárhoz képest v, a talajra érkező kavicsok távolsága d, az esés ideje t.

$$d = (v + v_k) \cdot t + (v - v_k) \cdot t = 2vt$$

A kavicsok esési idejét kiszámolhatjuk: $t = \sqrt{\dfrac{2 \cdot (2R + y)}{g}} = 2\ \text{s}$.

Így a kavicsok kosárhoz viszonyított kezdeti sebessége már számolható: $v = \dfrac{d}{2t} = 20\ \text{m/s}$.

b)

Írjuk fel a két sebesség arányát:

$$\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{(v + v_k)^2 + v_y^2}}{\sqrt{(v - v_k)^2 + v_y^2}}.$$

Ebből $v_y^2 = 95\ \dfrac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$.

A testek süllyedése kiszámolható: $\Delta h = \dfrac{v_y^2}{2g} = 4{,}75\ \text{m}$, a talajtól való magassága a két kavicsnak: $h - \Delta h = 15{,}25\ \text{m}$.

2)

Adatok: ω = 6 1/s, L = 50 cm, D = 50 N/m, m = 2 kg.

A mozgás egy függőleges síkmetszetét tekintjük. A vízszintes síkú egyenletes körmozgást végző testre három erő hat: mg nehézségi, K kényszererő, F_r rugóerő. Bontsuk fel a kényszererőt és a rugóerőt is függőleges és vízszintes komponensekre. A kényszererő mindkét komponense $\dfrac{\sqrt{2}}{2}K$ nagyságú, a rugóerőnek mindkét komponense $\dfrac{\sqrt{2}}{2}F_r$.

Írjuk fel a dinamika alapegyenletét x-, és y-irányokban.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}K = mg + \frac{\sqrt{2}}{2}F_r$$

$$\sum F_x = m \cdot a_{cp} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}F_r + \frac{\sqrt{2}}{2}K = m \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (L + \Delta L)\right)$$

A két egyenletből kapjuk a következőt: $\sqrt{2} \cdot F_r + mg = m \cdot \omega^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (L + \Delta L)\right)$

$$\sqrt{2} \cdot D\Delta L + mg = m \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (L + \Delta L)\right)$$

A rugó deformációja kiszámolható:

$$\Delta L = \frac{\omega^2 L - \sqrt{2}g}{2\frac{D}{m} - \omega^2} \approx 27{,}6 \text{ cm}.$$

3)

Adatok: D = 15 cm, d = 10 cm, μ = 0,3, m = 0,003 kg.

a) A kartonlap gyorsulása A, az érme gyorsulása $a = \mu g = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Biztosan akkor sikerül a kísérlet, ha amíg a karton elhagyja a pohár száját (azaz megtesz $\frac{D+d}{2}$ utat), az érme legfeljebb $\frac{d}{2}$ utat tesz meg:

$$\frac{D+d}{2} = \frac{A}{2}t^2; \qquad \frac{d}{2} = \frac{a}{2}t^2.$$

A két egyenletet osszuk el egymással, így az A gyorsulás kifejezhető:

$$A = \frac{D+d}{d} \cdot a = \mathbf{7{,}5\,\frac{m}{s^2}}.$$

b) Minél nagyobb sebességgel pöcköljük meg a kartonlapot, annál hamarabb esik le róla a pénzérme. A feladat a lehető legkisebb kezdősebességet kérdezi. Naiv módon azt gondolhatjuk, hogy a lehető legkisebb kezdősebesség esetén a pénzérme a pohár túlsó szélénél esik le úgy, ahogy azt az *a*) részben leírtuk. Végezzük el a számítást!

Az érme gyorsulása a, a kartonlapé $-a$.

Kiszámolhatjuk az érme és a kartonlap közötti kölcsönhatás idejét:

$$\frac{d}{2} = \frac{a}{2}t^2 \qquad \rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{d}{a}} = 0{,}1826 \text{ s}.$$

Ennyi idő alatt a kartonlap által megtett út:

$$\frac{D+d}{2} = v_0 t - \frac{a}{2}t^2.$$

Ebből kifejezhető és kiszámolható a kartonlap kezdősebessége:

$$v_0 = \frac{\frac{D+d}{2} + \frac{a}{2}t^2}{t} = 0{,}9585\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Eredményünket úgy ellenőrizhetjük, ha meghatározzuk a pénzérme és a kartonlap sebességét a pohár túlsó szélénél:

$$v_{\text{pénz}} = at = 0{,}5477\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \text{és} \qquad v_{\text{lap}} = v_0 - at = 0{,}4108\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ellentmondásra jutottunk, mert a pénzérme nem mozoghat gyorsabban a kartonlapnál. Ugyanis csak akkor tud leesni a pénzérme, ha a laphoz képest „hátrafelé” mozog. (Másrészt a pénzérme sebessége nulláról fokozatosan nő, a lap sebessége meg csökken, tehát mielőtt az érme gyorsabb lenne a lapnál, találhatunk egy olyan pillanatot, amikor a kétféle sebesség megegyezik, és ettől kezdve megszűnik az érme elcsúszása a lapon, ehelyett mindkét test összetapadva egyenletesen mozog tovább.)

Az ellentmondást úgy oldhatjuk fel, ha rájövünk, hogy a pohárba eső pénzérme nem érheti el a pohár túlsó peremét, hanem hamarabb leesik a lapról. Tegyük fel, hogy a pohárba eső pénzérme maximális elmozdulása x, ahol $x < \frac{d}{2} = 5$ cm. A fentiekhez hasonló egyenleteket írhatunk fel, azonban $\frac{d}{2}$ helyére x-et kell írnunk:

$$x = \frac{a}{2}t^2$$
$$x + \frac{D}{2} = v_0 t - \frac{a}{2}t^2,$$

ahol a második egyenletben x helyére beírhatjuk x-nek az első egyenletben szereplő kifejezését:

$$\frac{a}{2}t^2 + \frac{D}{2} = v_0 t - \frac{a}{2}t^2 \qquad \rightarrow \qquad at^2 - v_0 t + \frac{D}{2} = 0.$$

Másodfokú egyenletre jutottunk, amiből a pöccöléstől a pénzérme leeséséig tartó idő kiszámítható:

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2aD}}{2a}.$$

A pénzérme leesésének a feltétele az, hogy a leesés pillanatában a kartonlap sebessége legyen nagyobb, mint pénzérme sebessége:

$$v_{\text{lap}} = v_0 - at \geq v_{\text{pénz}} = at\,,$$

amiből a következő reláció adódik:

$$v_0 \geq 2at\,.$$

Vegyük észre, hogy a másodfokú egyenletből könnyen kifejezhetjük a $2at$ szorzatot:

$$v_0 \geq 2at_{1,2} = v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2aD}\,.$$

A reláció alapján láthatjuk, hogy csak a gyök előtti – jel ad megfelelő megoldást, továbbá az is látszik, hogy a lehető legkisebb pöccölési sebességet a diszkrimináns nulla értéke adja:

$$\min v_0 = \sqrt{2aD} = \mathbf{0{,}9487\,\frac{m}{s}}.$$

Ebből megkaphatjuk x maximális értékét is:

$$\max x = \frac{a}{2}t^2 = \frac{a}{2}\left(\frac{v_0}{2a}\right)^2 = \frac{v_0^2}{8a} = 3{,}75 \text{ cm}.$$

Látszólag arra jutottunk, hogy minél nagyobb sebességgel pöccölünk, annál messzebb következik be a pénzérme leesése. Ez azonban nincs így. Ha a minimálisnál egyre nagyobb sebességgel pöccölünk, akkor a pénzérme leeséséig tartó idő egyre rövidebb ($t < \frac{v_0}{2a}$), ezért a fenti számítást nem használhatjuk. Ilyen esetekben numerikusan mindig meggyőződhetünk arról, hogy a fenti maximális távolságnál hamarabb esik le a pénzérme. Minél nagyobb a kartonlap kezdősebessége, annál kevésbé tud a pénzérme felgyorsulni, és ezzel együtt annál kevésbé lassul le a kartonlap.

Megjegyzés: Az időre kapott másodfokú egyenletből kifejezhetjük a kezdősebességet:

$$v_0 = \frac{at^2 + \frac{D}{2}}{t} = at + \frac{D}{2t}.$$

Észrevehetjük, hogy az utolsó összegben lévő két tag szorzata állandó (nem függ az időtől). Használhatjuk a számtani és a mértani közepekre érvényes relációt:

$$\frac{v_0}{2} = \frac{at + \frac{D}{2t}}{2} \geq \sqrt{(at)\cdot\left(\frac{D}{2t}\right)} = \sqrt{\frac{aD}{2}} = \text{állandó.}$$

Ismerjük fel, hogy a bal oldal legkisebb értékét az adja, amikor a számtani és mértani középben szereplő két tag egyenlő:

$$at = \frac{D}{2t} \quad \rightarrow \quad \min t = \sqrt{\frac{D}{2a}} \quad \rightarrow \quad \min v_0 = at + \frac{D}{2t} = 2at = 2a\cdot\sqrt{\frac{D}{2a}} = \sqrt{2aD}$$
$$= \mathbf{0,9487\,\frac{m}{s}}.$$

Meglepő, hogy a helyes végeredményt anélkül is megkaptuk, hogy a pénzérme és a kartonlap sebessége közötti relációt kihasználtuk volna.

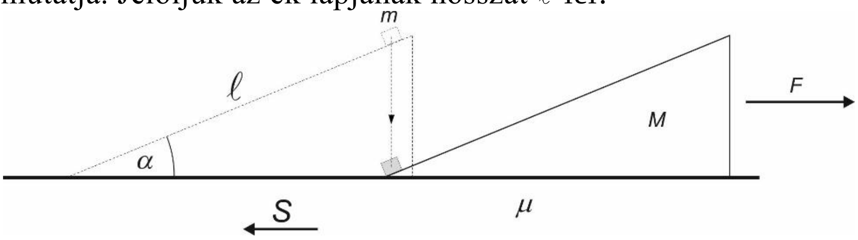
4)

Adatok: α = 30°, M = 2 kg, h = 0,4 m, m = 0,5 kg, μ = 0,4.

a)

Meg kell határoznunk az ék minimális gyorsulását, hogy kihúzva a kis test alól, mindvégig (nyomás nélkül) érintkezzen a kis testtel. (Ennél nagyobb gyorsulás esetén a két test közötti távolság növekszik.) Az ékre hat a súrlódási erő is, amelyet nem befolyásol a kis test jelenléte.

Határozzuk meg először az ék gyorsulását! Az ábra a folyamat kezdő- és véghelyzetét mutatja. Jelöljük az ék lapjának hosszát ℓ-lel!



A kis test útjának hossza az idő függvényében

$$\frac{1}{2}gt^2 = \ell\sin\alpha. \tag{1}$$

Az ék ugyanezen idő alatt megtesz

$$\frac{1}{2}at^2 = \ell\cos\alpha \tag{2}$$

utat.

(2) osztva (1)-gyel:

$$\frac{a}{g}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{tg\,\alpha} \quad\rightarrow\quad a=\frac{g}{tg\,\alpha}.$$

Az ék mozgásegyenlete:

$$F-S=Ma,$$

részletezve, az ékre ható erő:

$$F=Ma+S=M\,\frac{g}{\mathrm{tg}\alpha}+\mu Mg=Mg\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}+\mu\right).$$

Numerikus értéke:

$$F=2\text{ kg}\cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}30°}+0,4\right)=\mathbf{42,64\,N.}$$

b)

Írjuk fel a 0 kezdősebességgel induló két test lendületének arányát!

$$\frac{i}{I}=\frac{mv}{MV}=\frac{mgt}{Mat}=\frac{m}{M}\frac{g}{a}=\frac{m}{M}\cdot\frac{g}{\frac{g}{\mathrm{tg}\alpha}}=\frac{m\cdot\mathrm{tg}\alpha}{M}.$$

Számértékileg:

$$\frac{i}{I}=\frac{0,5\cdot\mathrm{tg}30°}{2}=0,1443.$$

Innen

$$I=\frac{i}{0,1443}=\mathbf{6,928}\cdot\boldsymbol{i}.$$

Az ék lendülete $\left(4\cdot\sqrt{3}\right)$ **6,928-szor** nagyobb, mint a kis testé. (Ez az arány a mozgás minden pillanatában fennáll.)

II. kategória, Gimnázium 10. évfolyam

1)

a)

Vízszintes úton a kifejtett erő: $F=kv_1^2+F_{gs}$

alakban adható meg, ahol k a levegő sűrűségétől, a test méretétől és alakjától függő állandó, F_{gs} pedig a szintén állandónak tekinthető gördülési ellenállás.

A domboldalon felfelé, illetve lefelé:

$$F=kv_2^2+F_{gs}+F_p$$
$$F=kv_3^2+F_{gs}-F_p$$

Itt $F_p=mgsin\alpha$ a nehézségi erő lejtővel párhuzamos komponense.

A második és a harmadik egyenlet összegéből kivonva az első egyenlet kétszeresét:

$$k(v_3^2+v_2^2-2v_1^2)=0$$
$$v_3=\sqrt{2v_1^2-v_2^2}=26,5\text{ km/h}$$

b)

A teljesítmények aránya egyenlő a sebességek arányával:

$$P_1 : P_2 : P_3 = Fv_1 : Fv_2 : Fv_3 = v_1 : v_2 : v_3 = 2 : 1 : 2{,}65$$

2)

a)

Az A ponthoz rögzített hosszú fonál minden pontjában ugyanakkora erő ébred, jelöljük ennek nagyságát F-fel! Az M tömegű teherből és a legalsó mozgócsigából álló rendszerre felírhatjuk Newton II. törvényét:

$$(M + m)g - 2F = (M + m)A,$$

ahol a teher A gyorsulásának irányát lefelé választottuk pozitívnak. A B jelű mozgócsiga mozgásegyenlete:

$$2F - F - mg = ma,$$

hiszen a csiga felfelé kezd gyorsulni (egyelőre még ismeretlen a gyorsulással). A B jelű csiga a gyorsulása és a teher A gyorsulása közötti kapcsolatot a fonál állandó hosszából következő kényszerfeltételből határozhatjuk meg. Ha a B jelű csiga kicsiny x távolsággal elmozdul felfelé, akkor ennek következtében a teher $x/2$ távolsággal kerül lejjebb, azaz a B jelű csiga sebessége, és így gyorsulása is minden pillanatban kétszer akkora (és ellentétes irányú), mint a teher gyorsulása:

$$A = \frac{a}{2}.$$

A fenti három egyenletből a teher keresett gyorsulása meghatározható:

$$A = \frac{M - m}{M + 5m} g,$$

a fonálerő pedig:

$$F = \frac{3M + 3m}{M + 5m} mg.$$

b)

Az $M \gg m$ határesetben a gyorsulásra kapott kifejezésben m-et elhanyagolhatjuk M mellett, így a teher gyorsulására $A \approx g$ adódik. A fonálban ekkor elhanyagolhatóan kicsiny ($3mg$) erő ébred (de nem lazul meg), a *teher pedig (közel) szabadeséssel elindul lefelé*, a B jelű csiga pedig közelítőleg $2g$ gyorsulással felfelé.

3)

a) Legyen a henger keresztmetszete A, a rugó direkciós ereje D! A rugó összenyomódása:

$$y_0 = 2 \cdot \frac{V_0}{A}.$$

A rugóban tárolt energia:

$$W_{r0} = \frac{1}{2} D y_0^2 = 2D \frac{V_0^2}{A^2}.$$

A dugattyúk egyensúlyából:

$$p_0 A = D y_0$$

$$p_0 A = D \cdot 2 \cdot \frac{V_0}{A},$$

$$D = \frac{p_0 A^2}{2V_0}.$$

D értékét az energia kifejezésébe beírva:

$$W_{r0} == 2 \cdot \frac{p_0 A^2}{2V_0} \cdot \frac{V_0^2}{A^2},$$

$$\boxed{W_{r0} = p_0 V_0 = 20 \text{ J.}}$$

b) Legyen a gázok kezdeti hőmérséklete T_0, a melegítés utáni nyomásuk p_1, térfogatuk V_1! Az egyesített gáztörvényből és a dugattyúk egyensúlyi feltételéből:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{3T_0},$$

$$p_1 A = D \cdot 2 \cdot \frac{V_1}{A},$$

$$p_1 = \frac{V_1}{V_0} p_0.$$

Ezekből: $V_1 = \sqrt{3} V_0,$

$$\boxed{p_1 = \sqrt{3}\, p_0 = \sqrt{3} \cdot 10^4 \text{ Pa.}}$$

c)

A melegítés után a rugóban tárolt energia:

$$W_{r1}=\frac{1}{2}D\left(\frac{2\cdot\sqrt{3}V_0}{A}\right)^2=\frac{6DV_0^2}{A^2}.$$

Használjuk fel, hogy $D=\dfrac{p_0A^2}{2V_0}$:

$$W_{r1}=\frac{6DV_0^2}{A^2}=\frac{6\cdot\dfrac{p_0A^2}{2V_0}V_0^2}{A^2}=3p_0V_0=60\ \text{J}.$$

4)

a) $F_s=\mu F_k=\mu\sqrt{(EQ\cos 45°)^2+(mg)^2}=0{,}025\text{N}.$

b) $\sum W=\Delta E_{kin.},$

$$E\,Q\cos 45°\,\Delta l-\mu F_k\,\Delta l-\frac{0+D\,\Delta l}{2}\Delta l=0,\rightarrow\quad \Delta l_{max}=0{,}15\text{ m}.$$

c) v_{max}, ha $\sum\mathbf{F}=\mathbf{0}$,

$$E\,Q\cos 45°=D\,\Delta l_1+\mu F_k,\rightarrow\ \Delta l_1=0{,}075\text{ m},$$

$$D\,\Delta l_2=E\,Q\cos 45°+\mu F_k,\rightarrow\ \Delta l_2=0{,}125\text{ m}$$

$$x=0{,}05\text{ m}.$$

III. kategória, Szakközépiskola 9. évfolyam

1)

a)

A mobil vízszintes irányban a sárkányrepülő $\boldsymbol{v_o}$ kezdősebességével egyenletesen mozgott, függőlegesen szabadon esett. Becsapódási sebességének vízszintes és függőleges összetevői ezzel v_o és *gt*. A szabályos háromszög segítségével $2v_0$ = 144 km/h = 40 m/s, vagyis v_0 = 20 m/s = 72 km/h.

b)

A szabályos háromszög magassága $gt = 2v_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot v_0$, vagyis $t = \sqrt{3} \cdot \frac{v_0}{g} = 3{,}46\ \mathrm{s}$.

Tehát 3,46 s-ig esett a mobil.

c)

A négyzetes úttörvény szerint $h = \frac{g}{2} t^2 = 60\ \mathrm{m}$ magasan haladt a sárkányrepülő.

d)

Vízszintes irányban a mobil $s = v_0 \cdot t = 69{,}2\ \mathrm{m}$-t tesz meg, légvonalban $\sqrt{h^2 + s^2} = 91{,}6\ \mathrm{m}$-t. Tehát 91,6 m-re van légvonalban a két hely egymástól.

2)

Adatok: $t_2 = \frac{3}{4} t_1$, $\mu = \frac{1}{6}$.

A két testből álló rendszer gyorsulását a lógó testre ható gravitációs erő és a csúszó másikra ható súrlódási erő szabja meg.

A rajzolt szituációban: $a_1 = \dfrac{mg - \mu Mg}{m + M}$,

a felcseréléskor $a_2 = \dfrac{Mg - \mu mg}{M + m}$.

Az indulástól megtett utak egyenlők: $\frac{1}{2} a_1 t_1^{\,2} = \frac{1}{2} a_2 \left(\frac{3}{4} t_1 \right)^2$.

Ebből $a_1 = \frac{9}{16} a_2$.

Azaz $\dfrac{mg - \mu Mg}{m + M} = \dfrac{9}{16} \cdot \dfrac{Mg - \mu mg}{M + m}$.

Egyszerűsítés és rendezés után $16m - \frac{16}{6} M = 9M - \frac{9}{6} m$,

ebből: $\frac{M}{m} = \frac{3}{2}$.

3)

a)
A deszka akkor ér leghamarabb az asztal széléhez, ha legnagyobb a gyorsulása, vagyis, ha a deszka és a hasáb között a tapadási erőnek éppen a maximális értéke lép fel.

$$F_{\text{tmax}}' = \mu_0' \cdot F_{\text{ny}}' = \mu_0' \cdot m' \cdot g = 0{,}4\ \text{N}.$$

Eközben a deszka az asztalon megcsúszik, vagyis az asztal által a deszkára kifejtett tapadási erő lehetséges maximális értéke kisebb, mint az előbb számolt F_{tmax}', ez jelen esetben teljesül is:

$$F_{\text{tmax}} = \mu_0 \cdot F_{\text{ny}} = \mu_0 \cdot (m' + m) \cdot g = 0{,}3\ \text{N}.$$

Tehát a deszkára ható vízszintes eredő erő:

$$\Sigma F = F_{\text{tmax}}' - F_{\text{s}} = \mu_0' \cdot m' \cdot g - \mu \cdot (m' + m) \cdot g = 0{,}25\ \text{N}.$$

Innen a gyorsulás: $a = \dfrac{\Sigma F}{m} = \dfrac{\mu_0' \cdot m' \cdot g - \mu \cdot (m' + m) \cdot g}{m} = 1{,}25\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}.$

Alkalmazzuk a hasábra a dinamika alapegyenletét:

$$F - F_{t\max}' = ma \rightarrow F = F_{t\max}' + ma = 0{,}525\ \text{N}.$$

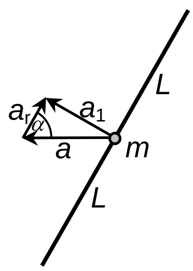
b)

A keresett időtartam: $s = \dfrac{a}{2} \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = 0{,}8\,\text{s}.$

c)
A deszka tetszőleges hosszúságú lehet, hiszen a hasáb nem csúszik meg rajta.

4)

a)
Az m tömegű test a nyugvó rendszerben a rúd irányára merőlegesen gyorsul, mert ebbe az irányba hat a rúd által kifejtett kényszererő. Legyen a test nyugvó rendszerbeli gyorsulása a_1, a rúdhoz viszonyított gyorsulása a_r! Az ábra alapján a rúdhoz viszonyított gyorsulás:



$$a_{\text{r}} = a\cos\alpha.$$

Ezzel a gyorsulással mozog a rúdhoz képest, ezért a lecsúszás pillanatában:

$$L = \frac{a_{\text{r}}}{2} t^2,$$

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2L}{a\cos\alpha}} = 2\ \text{s}.}$$

b) A dinamika alapegyenletéből:

$$ma_1 = K,$$

$$\boxed{K = ma\sin\alpha \approx 0{,}14\ \text{N}.}$$

IV. kategória, Szakközépiskola 10. évfolyam

1)

Súlytalan csigasorral 1,67 N erőre lenne szükség. Azért van nagyobb erőre szükség, mert a csigasor nem súlytalan.

Figyelembe kell venni, hogy az alsó testre ható erők között

$$6F = mg + Mg$$

$$6\frac{Mg}{5} = mg + Mg$$

$$\frac{M}{5} = m = 0{,}2\ \text{kg}$$

Az alsó mozgócsigasor tömege az alsó test tömegének ötödrésze.

A rögzítésnél fellépő erő:

$$7F + mg = F_k = 16\ \text{N}$$

2)

A szögelfordulások is, az utak (ívek) is úgy aránylanak egymáshoz, mint a páratlan számok:

$$s_1 : s_2 : s_3 : s_4 = 1:3:5:7.$$

Ez alapján: $s_1 = \frac{1}{5} \cdot s_3 = 7\ \text{cm}$, $s_2 = 3 \cdot s_1 = 21\ \text{cm}$, $s_4 = 7 \cdot s_1 = 49\ \text{cm}$.

a)

$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = \frac{2}{3} \cdot K \Rightarrow K = \frac{3}{2} \cdot (s_1 + s_2 + s_3 + s_4) = 168\ \text{cm}$, $R = \frac{K}{2\pi} \approx 26{,}74\ \text{cm}$.

b)

$s_5 = 9 \cdot s_1 = 63\ \text{cm}$. Az eddig megtett összes út:

$(7 + 21 + 35 + 49 + 63)\text{cm} = 175\ \text{cm} = 168\ \text{cm} + 7\ \text{cm}$. Ott lesz a test, ahol az 1. időtartam végén volt.

c)

A 2. és a 4. időtartam között a test $s_3 + s_4 = 84\ \text{cm} = \frac{1}{2}K$ utat tesz meg. A két sebesség egymással párhuzamos és ellentétes irányú, valamint $v_{4.} = 2 \cdot v_{2.}$.

3)

a)

A feltétel szerint $p_0 - p_1 = p_2 - p_0$.

Gay-Lussac II. törvénye alapján

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

A két egyenletből:

$$p_1 = \frac{2p_0}{1 + \frac{T_2}{T_1}} = 92{,}7\ \text{kPa}$$

A tartályba tölthető gázmennyiség:

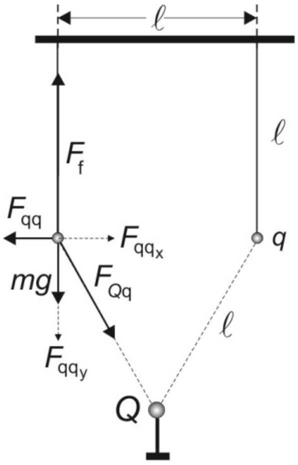
$$m = \frac{p_1 V M}{R T_1} = 12{,}3\ \mathrm{g}$$

b)

A túlnyomás: $p_t = p_2 - p_0 = p_0 - p_1 = 7{,}3\ \mathrm{kPa}$

4)

Egyensúlyban a fonalakra függesztett golyókra ható eredő erő zérus. A három golyó középpontja egyazon függőleges síkban helyezkedik el. A szimmetria miatt elegendő csak az egyik golyóra ható erőket vizsgálni. Ezek: az mg nehézségi erő, az F_{qq} elektromos erő, amit a másik felfüggesztett test fejt ki, a harmadik az F_{Qq} elektromos erő, amit a keresett töltés fejt ki, végül az F_{f} fonálerő, amit a felfüggesztés fejt ki a vizsgált golyóra. Az ábra ezeket mutatja:



Az erők eredője vízszintes irányban:

$$\sum F_{\mathrm{x}} = F_{\mathrm{qqx}} - F_{\mathrm{Qqx}} = F_{\mathrm{qqx}} - \frac{F_{\mathrm{Qq}}}{2} = 0, \qquad (1)$$

ahol $F_{\mathrm{Qq}_x} = \dfrac{F_{\mathrm{Qq}}}{2}$, felhasználtuk, hogy a három gömböcske egyenlő oldalú háromszög csúcsaiban helyezkedik el, és így az F_{Qq} erő vízszintes összetevője éppen fele az F_{Qq} erőnek.

Az erők eredője függőleges irányban (abszolút értékeikkel kifejezve):

$$\sum F_{\mathrm{y}} = mg + F_{\mathrm{Qqy}} - F_{\mathrm{f}} = mg + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{\mathrm{Qq}} - F_{\mathrm{f}} = 0, \qquad (2)$$

ahol az egyenlő oldalú háromszög *magasságát* megadó megfelelő kifejezést alkalmaztuk az F_{Qqy} függőleges erőösszetevőre.

a) (1)-be és (2)-be beírva a megfelelő erőtörvényeket:

$$k\frac{q^2}{\ell^2} - k\frac{qQ}{2\ell^2} = 0, \qquad (1')$$

$$(2')$$

(1')-ből egyszerűsítés után a keresett Q töltés meghatározható:

$$Q = 2q = 2\cdot\left(-6\cdot 10^{-7}\right)\mathrm{C} = \mathbf{-1{,}2\cdot 10^{-6}\,C.}$$

b) A kapott eredményt (2')-be írva a fonalakban ható erő:

$$F_f = mg + \frac{\sqrt{3}}{2}k\frac{qQ}{l^2} = 5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 9\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\,\frac{\left(-6\cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}\right)\cdot\left(-1{,}2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}\right)}{0{,}1^2\,\mathrm{m}^2} = 0{,}611\mathrm{N}$$