

35. Mikola verseny 2. fordulójának megoldásai

I. kategória, Gimnázium 9. évfolyam

1)

a)

A kerék kosarának sebessége legyen v_k , az elhajított kavicsok sebessége a kosárhoz képest v , a talajra érkező kavicsok távolsága d , az esés ideje t .

$$d = (v + v_k) \cdot t + (v - v_k) \cdot t = 2vt$$

A kavicsok esési idejét kiszámolhatjuk: $t = \sqrt{\frac{2 \cdot (2R + y)}{g}} = 2 \text{ s}$.

Így a kavicsok kosárhoz viszonyított kezdeti sebessége már számolható: $v = \frac{d}{2t} = 20 \text{ m/s}$.

b)

Írjuk fel a két sebesség arányát:

$$\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{(v + v_k)^2 + v_y^2}}{\sqrt{(v - v_k)^2 + v_y^2}}$$

Ebből $v_y^2 = 95 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$.

A testek süllyedése kiszámolható: $\Delta h = \frac{v_y^2}{2g} = 4,75 \text{ m}$, a talajtól való magassága a két

kavicsnak: $h - \Delta h = 15,25 \text{ m}$.

2)

Adatok: $\omega = 6 \text{ 1/s}$, $L = 50 \text{ cm}$, $D = 50 \text{ N/m}$, $m = 2 \text{ kg}$.

A mozgás egy függőleges síkmetszetét tekintjük. A vízszintes síkú egyenletes körmozgást végző testre három erő hat: mg nehézségi, K kényszererő, F_r rugóerő. Bontsuk fel a kényszererőt és a rugóerőt is függőleges és vízszintes komponensekre. A kényszererő mindkét komponense $\frac{\sqrt{2}}{2}K$ nagyságú, a rugóerőnek mindkét komponense $\frac{\sqrt{2}}{2}F_r$.

Írjuk fel a dinamika alapegyenletét x-, és y-irányokban.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}K = mg + \frac{\sqrt{2}}{2}F_r$$

$$\sum F_x = m \cdot a_{cp} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}F_r + \frac{\sqrt{2}}{2}K = m \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (L + \Delta L) \right)$$

A két egyenletből kapjuk a következőt: $\sqrt{2} \cdot F_r + mg = m \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (L + \Delta L) \right)$

$$\sqrt{2} \cdot D\Delta L + mg = m \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (L + \Delta L) \right)$$

A rugó deformációja kiszámolható:

$$\Delta L = \frac{\omega^2 L - \sqrt{2}g}{2\frac{D}{m} - \omega^2} \approx 27,6 \text{ cm}.$$

3)

Adatok: $D = 15 \text{ cm}$, $d = 10 \text{ cm}$, $\mu = 0,3$, $m = 0,003 \text{ kg}$.

a) A kartonlap gyorsulása A , az érme gyorsulása $a = \mu g = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Biztosan akkor sikerül a kísérlet, ha amíg a karton elhagyja a pohár száját (azaz megtesz $\frac{D+d}{2}$ utat), az érme legfeljebb $\frac{d}{2}$ utat tesz meg:

$$\frac{D+d}{2} = \frac{A}{2}t^2; \quad \frac{d}{2} = \frac{a}{2}t^2.$$

A két egyenletet osszuk el egymással, így az A gyorsulás kifejezhető:

$$A = \frac{D+d}{d} \cdot a = 7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) Minél nagyobb sebességgel pöcköljük meg a kartonlapot, annál hamarabb esik le róla a pénzérme. A feladat a lehető legkisebb kezdősebességet kérdezi. Naiv módon azt gondolhatjuk, hogy a lehető legkisebb kezdősebesség esetén a pénzérme a pohár tulsó szélénél esik le úgy, ahogy azt az a) részben leírtuk. Végezzük el a számítást!

Az érme gyorsulása a , a kartonlapé $-a$.

Kiszámolhatjuk az érme és a kartonlap közötti kölcsönhatás idejét:

$$\frac{d}{2} = \frac{a}{2}t^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{d}{a}} = 0,1826 \text{ s}.$$

Ennyi idő alatt a kartonlap által megtett út:

$$\frac{D+d}{2} = v_0 t - \frac{a}{2}t^2.$$

Ebből kifejezhető és kiszámolható a kartonlap kezdősebessége:

$$v_0 = \frac{\frac{D+d}{2} + \frac{a}{2}t^2}{t} = 0,9585 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Eredményünket úgy ellenőrizhetjük, ha meghatározzuk a pénzérme és a kartonlap sebességét a pohár tulsó szélénél:

$$v_{\text{pénz}} = at = 0,5477 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{és} \quad v_{\text{lap}} = v_0 - at = 0,4108 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ellentmondásra jutottunk, mert a pénzérme nem mozoghat gyorsabban a kartonlapnál. Ugyanis csak akkor tud leesni a pénzérme, ha a laphoz képest „hátrafelé” mozog. (Másképpen a pénzérme sebessége nulláról fokozatosan nő, a lap sebessége meg csökken, tehát mielőtt az érme gyorsabb lenne a lapnál, találhatunk egy olyan pillanatot, amikor a kétféle sebesség megegyezik, és ettől kezdve megszűnik az érme elcsúszása a lapon, ehelyett mindkét test összetapadva egyenletesen mozog tovább.)

Az ellentmondást úgy oldhatjuk fel, ha rájövünk, hogy a pohárba eső pénzérme nem érheti el a pohár tulsó peremét, hanem hamarabb leesik a lapról. Tegyük fel, hogy a pohárba eső pénzérme

maximális elmozdulása x , ahol $x < \frac{d}{2} = 5$ cm. A fentiekhez hasonló egyenleteket írhatunk fel, azonban $\frac{d}{2}$ helyére x -et kell írunk:

$$x = \frac{a}{2}t^2$$

$$x + \frac{D}{2} = v_0t - \frac{a}{2}t^2,$$

ahol a második egyenletben x helyére beírhatjuk x -nek az első egyenletben szereplő kifejezését:

$$\frac{a}{2}t^2 + \frac{D}{2} = v_0t - \frac{a}{2}t^2 \quad \rightarrow \quad at^2 - v_0t + \frac{D}{2} = 0.$$

Másodfokú egyenletre jutottunk, amiből a pöcköléstől a pénzérme leeséséig tartó idő kiszámítható:

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2aD}}{2a}.$$

A pénzérme leesésének a feltétele az, hogy a leesés pillanatában a kartonlap sebessége legyen nagyobb, mint pénzérme sebessége:

$$v_{\text{lap}} = v_0 - at \geq v_{\text{pénz}} = at,$$

amiből a következő reláció adódik:

$$v_0 \geq 2at.$$

Vegyük észre, hogy a másodfokú egyenletből könnyen kifejezhetjük a $2at$ szorzatot:

$$v_0 \geq 2at_{1,2} = v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2aD}.$$

A reláció alapján láthatjuk, hogy csak a gyök előtti $-$ jel ad megfelelő megoldást, továbbá az is látszik, hogy a lehető legkisebb pöckölési sebességet a diszkrimináns nulla értéke adja:

$$\min v_0 = \sqrt{2aD} = \mathbf{0,9487 \frac{m}{s}}.$$

Ebből megkaphatjuk x maximális értékét is:

$$\max x = \frac{a}{2}t^2 = \frac{a}{2} \left(\frac{v_0}{2a} \right)^2 = \frac{v_0^2}{8a} = 3,75 \text{ cm}.$$

Látszólag arra jutottunk, hogy minél nagyobb sebességgel pöckölünk, annál messzebb következik be a pénzérme leesése. Ez azonban nincs így. Ha a minimálisnál egyre nagyobb sebességgel pöckölünk, akkor a pénzérme leeséséig tartó idő egyre rövidebb ($t < \frac{v_0}{2a}$), ezért a fenti számítást nem használhatjuk. Ilyen esetekben numerikusan mindig meggyőződhetünk arról, hogy a fenti maximális távolságnál hamarabb esik le a pénzérme. Minél nagyobb a kartonlap kezdősebessége, annál kevésbé tud a pénzérme felgyorsulni, és ezzel együtt annál kevésbé lassul le a kartonlap.

Megjegyzés: Az időre kapott másodfokú egyenletből kifejezhetjük a kezdősebességet:

$$v_0 = \frac{at^2 + \frac{D}{2}}{t} = at + \frac{D}{2t}.$$

Észrevehetjük, hogy az utolsó összegben lévő két tag szorzata állandó (nem függ az időtől). Használhatjuk a számtani és a mértani közepekre érvényes relációt:

$$\frac{v_0}{2} = \frac{at + \frac{D}{2t}}{2} \geq \sqrt{(at) \cdot \left(\frac{D}{2t}\right)} = \sqrt{\frac{aD}{2}} = \text{állandó.}$$

Ismerjük fel, hogy a bal oldal legkisebb értékét az adja, amikor a számtani és mértani középben szereplő két tag egyenlő:

$$at = \frac{D}{2t} \rightarrow \min t = \sqrt{\frac{D}{2a}} \rightarrow \min v_0 = at + \frac{D}{2t} = 2at = 2a \cdot \sqrt{\frac{D}{2a}} = \sqrt{2aD} \\ = \mathbf{0,9487 \frac{m}{s}}.$$

Meglepő, hogy a helyes végeredményt anélkül is megkaptuk, hogy a pénzérme és a kartonlap sebessége közötti relációt kihasználtuk volna.

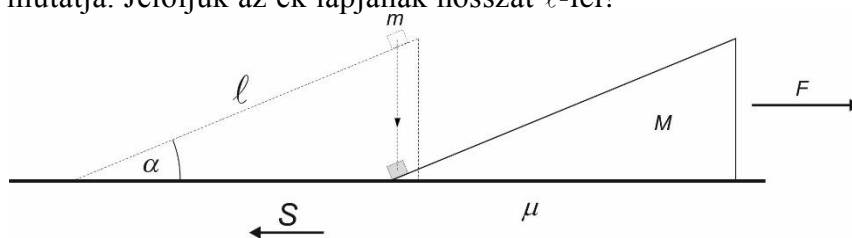
4)

Adatok: $\alpha = 30^\circ$, $M = 2 \text{ kg}$, $h = 0,4 \text{ m}$, $m = 0,5 \text{ kg}$, $\mu = 0,4$.

a)

Meg kell határoznunk az ék minimális gyorsulását, hogy kihúzva a kis test alól, mindvégig (nyomás nélkül) érintkezzen a kis testtel. (Ennél nagyobb gyorsulás esetén a két test közötti távolság növekszik.) Az ékre hat a súrlódási erő is, amelyet nem befolyásol a kis test jelenléte.

Határozzuk meg először az ék gyorsulását! Az ábra a folyamat kezdő- és véghelyzetét mutatja. Jelöljük az ék lapjának hosszát ℓ -lel!



A kis test útjának hossza az idő függvényében

$$\frac{1}{2}gt^2 = \ell \sin \alpha. \quad (1)$$

Az ék ugyanezen idő alatt megtesz

$$\frac{1}{2}at^2 = \ell \cos \alpha \quad (2)$$

utat.

(2) osztva (1)-gyel:

$$\frac{a}{g} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \rightarrow a = \frac{g}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Az ék mozgásegyenlete:

$$F - S = Ma,$$

részletezve, az ékre ható erő:

$$F = Ma + S = M \frac{g}{\operatorname{tg} \alpha} + \mu Mg = Mg \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \mu \right).$$

Numerikus értéke:

$$F = 2 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} + 0,4 \right) = \mathbf{42,64 \text{ N}}.$$

b)

Írjuk fel a 0 kezdősebességgel induló két test lendületének arányát!

$$\frac{i}{I} = \frac{mv}{MV} = \frac{mgt}{Mat} = \frac{m}{M} \frac{g}{a} = \frac{m}{M} \cdot \frac{g}{\frac{g}{\operatorname{tg} \alpha}} = \frac{m \cdot \operatorname{tg} \alpha}{M}.$$

Számértékileg:

$$\frac{i}{I} = \frac{0,5 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ}{2} = 0,1443.$$

Innen

$$I = \frac{i}{0,1443} = \mathbf{6,928 \cdot i}.$$

Az ék lendülete ($4 \cdot \sqrt{3}$) **6,928-szor** nagyobb, mint a kis testé. (Ez az arány a mozgás minden pillanatában fennáll.)

II. kategória, Gimnázium 10. évfolyam

1)

a)

Vízszintes úton a kifejtett erő: $F = kv_1^2 + F_{gs}$

alakban adható meg, ahol k a levegő sűrűségétől, a test méretétől és alakjától függő állandó, F_{gs} pedig a szintén állandónak tekinthető gördülési ellenállás.

A domboldalon felfelé, illetve lefelé:

$$F = kv_2^2 + F_{gs} + F_p$$

$$F = kv_3^2 + F_{gs} - F_p$$

Itt $F_p = mgs \sin \alpha$ a nehézségi erő lejtővel párhuzamos komponense.

A második és a harmadik egyenlet összegéből kivonva az első egyenlet kétszeresét:

$$k(v_3^2 + v_2^2 - 2v_1^2) = 0$$

$$v_3 = \sqrt{2v_1^2 - v_2^2} = 26,5 \text{ km/h}$$

b)

A teljesítmények aránya egyenlő a sebességek arányával:

$$P_1: P_2: P_3 = Fv_1: Fv_2: Fv_3 = v_1: v_2: v_3 = 2: 1: 2,65$$

2)

a)

Az A ponthoz rögzített hosszú fonál minden pontjában ugyanakkora erő ébred, jelöljük ennek nagyságát F -fel! Az M tömegű teherből és a legalsó mozgócsigából álló rendszerre felírhatjuk Newton II. törvényét:

$$(M + m)g - 2F = (M + m)A,$$

ahol a teher A gyorsulásának irányát lefelé választottuk pozitívnak. A B jelű mozgócsiga mozgásegyenlete:

$$2F - F - mg = ma,$$

hiszen a csiga felfelé kezd gyorsulni (egyelőre még ismeretlen a gyorsulással). A B jelű csiga a gyorsulása és a teher A gyorsulása közötti kapcsolatot a fonál állandó hosszából következő kényszerfeltételből határozhatjuk meg. Ha a B jelű csiga kicsiny x távolsággal elmozdul felfelé, akkor ennek következtében a teher $x/2$ távolsággal kerül lejjebb, azaz a B jelű csiga sebessége, és így gyorsulása is minden pillanatban kétszer akkora (és ellentétes irányú), mint a teher gyorsulása:

$$A = \frac{a}{2}.$$

A fenti három egyenletből a teher keresett gyorsulása meghatározható:

$$A = \frac{M - m}{M + 5m} g,$$

a fonálerő pedig:

$$F = \frac{3M + 3m}{M + 5m} mg.$$

b)

Az $M \gg m$ határesetben a gyorsulásra kapott kifejezésben m -et elhanyagolhatjuk M mellett, így a teher gyorsulására $A \approx g$ adódik. A fonálban ekkor elhanyagolhatóan kicsiny ($3mg$) erő ébred (de nem lazul meg), a *teher pedig (közel) szabadeséssel elindul lefelé*, a B jelű csiga pedig közelítőleg $2g$ gyorsulással felfelé.

3)

a) Legyen a henger keresztmetszete A , a rugó direkciós ereje D ! A rugó összenyomódása:

$$y_0 = 2 \cdot \frac{V_0}{A}.$$

A rugóban tárolt energia:

$$W_{r0} = \frac{1}{2} D y_0^2 = 2D \frac{V_0^2}{A^2}.$$

A dugattyúk egyensúlyából:

$$p_0 A = D y_0$$

$$p_0 A = D \cdot 2 \cdot \frac{V_0}{A},$$

$$D = \frac{p_0 A^2}{2V_0}.$$

D értékét az energia kifejezésébe beírva:

$$W_{r0} = 2 \cdot \frac{p_0 A^2}{2V_0} \cdot \frac{V_0^2}{A^2},$$

$$\boxed{W_{r0} = p_0 V_0 = 20 \text{ J.}}$$

b) Legyen a gázok kezdeti hőmérséklete T_0 , a melegítés utáni nyomásuk p_1 , térfogatuk V_1 ! Az egyesített gáztörvényből és a dugattyúk egyensúlyi feltételéből:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{3T_0},$$

$$p_1 A = D \cdot 2 \cdot \frac{V_1}{A},$$

$$p_1 = \frac{V_1}{V_0} p_0.$$

Ezekből:

$$V_1 = \sqrt{3} V_0,$$

$$\boxed{p_1 = \sqrt{3} p_0 = \sqrt{3} \cdot 10^4 \text{ Pa.}}$$

c)

A melegítés után a rugóban tárolt energia:

$$W_{\text{r1}} = \frac{1}{2} D \left(\frac{2 \cdot \sqrt{3} V_0}{A} \right)^2 = \frac{6 D V_0^2}{A^2}.$$

Használjuk fel, hogy $D = \frac{p_0 A^2}{2 V_0}$:

$$W_{\text{r1}} = \frac{6 D V_0^2}{A^2} = \frac{6 \cdot \frac{p_0 A^2}{2 V_0} V_0^2}{A^2} = 3 p_0 V_0 = 60 \text{ J}.$$

4)

a) $F_s = \mu F_k = \mu \sqrt{(E Q \cos 45^\circ)^2 + (m g)^2} = 0,025 \text{ N}.$

b) $\sum W = \Delta E_{\text{kin.}},$

$$E Q \cos 45^\circ \Delta l - \mu F_k \Delta l - \frac{0 + D \Delta l}{2} \Delta l = 0, \rightarrow \Delta l_{\text{max}} = 0,15 \text{ m}.$$

c) $v_{\text{max}}, \text{ ha } \sum \mathbf{F} = \mathbf{0},$

$$E Q \cos 45^\circ = D \Delta l_1 + \mu F_k, \rightarrow \Delta l_1 = 0,075 \text{ m},$$

$$D \Delta l_2 = E Q \cos 45^\circ + \mu F_k, \rightarrow \Delta l_2 = 0,125 \text{ m}$$

$$x = 0,05 \text{ m}.$$

III. kategória, Szakközépiskola 9. évfolyam

1)

a)

A mobil vízszintes irányban a sárkányrepülő v_0 kezdősebességével egyenletesen mozgott, függőlegesen szabadon esett. Becsapódási sebességének vízszintes és függőleges összetevői ezzel v_0 és gt . A szabályos háromszög segítségével $2v_0 = 144 \text{ km/h} = 40 \text{ m/s}$, vagyis $v_0 = 20 \text{ m/s} = 72 \text{ km/h}$.

b)

A szabályos háromszög magassága $gt = 2v_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot v_0$, vagyis $t = \sqrt{3} \cdot \frac{v_0}{g} = 3,46 \text{ s}$.

Tehát 3,46 s-ig esett a mobil.

c)

A négyzetes úttörvény szerint $h = \frac{g}{2}t^2 = 60 \text{ m}$ magasan haladt a sárkányrepülő.

d)

Vízszintes irányban a mobil $s = v_0 \cdot t = 69,2 \text{ m}$ -t tesz meg, légvonalban $\sqrt{h^2 + s^2} = 91,6 \text{ m}$ -t. Tehát 91,6 m-re van légvonalban a két hely egymástól.

2)

Adatok: $t_2 = \frac{3}{4}t_1$, $\mu = \frac{1}{6}$.

A két testből álló rendszer gyorsulását a lógó testre ható gravitációs erő és a csúszó másikra ható súrlódási erő szabja meg.

A rajzolt szituációban: $a_1 = \frac{mg - \mu Mg}{m + M}$.

a felcseréléskor $a_2 = \frac{Mg - \mu mg}{M + m}$.

Az indulástól megtett utak egyenlők: $\frac{1}{2}a_1t_1^2 = \frac{1}{2}a_2\left(\frac{3}{4}t_1\right)^2$.

Ebből $a_1 = \frac{9}{16}a_2$.

Azaz $\frac{mg - \mu Mg}{m + M} = \frac{9}{16} \cdot \frac{Mg - \mu mg}{M + m}$.

Egyszerűsítés és rendezés után $16m - \frac{16}{6}M = 9M - \frac{9}{6}m$,

ebből: $\frac{M}{m} = \frac{3}{2}$.

3)

a)

A deszka akkor ér leghamarabb az asztal széléhez, ha legnagyobb a gyorsulása, vagyis, ha a deszka és a hasáb között a tapadási erők éppen a maximális értéke lép fel.

$$F_{\text{tmax}}' = \mu_0' \cdot F_{\text{ny}}' = \mu_0' \cdot m' \cdot g = 0,4 \text{ N.}$$

Eközben a deszka az asztalon megcsúszik, vagyis az asztal által a deszkára kifejtett tapadási erő lehetséges maximális értéke kisebb, mint az előbb számolt F_{tmax}' , ez jelen esetben teljesül is:

$$F_{\text{tmax}} = \mu_0 \cdot F_{\text{ny}} = \mu_0 \cdot (m' + m) \cdot g = 0,3 \text{ N.}$$

Tehát a deszkára ható vízszintes eredő erő:

$$\Sigma F = F_{\text{tmax}}' - F_s = \mu_0' \cdot m' \cdot g - \mu \cdot (m' + m) \cdot g = 0,25 \text{ N.}$$

Innen a gyorsulás: $a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{\mu_0' \cdot m' \cdot g - \mu \cdot (m' + m) \cdot g}{m} = 1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Alkalmazzuk a hasábra a dinamika alapegyenletét:

$$F - F_{\text{tmax}}' = ma \rightarrow F = F_{\text{tmax}}' + ma = 0,525 \text{ N.}$$

b)

A keresett időtartam: $s = \frac{a}{2} \cdot t^2 \Rightarrow t = 0,8 \text{ s.}$

c)

A deszka tetszőleges hosszúságú lehet, hiszen a hasáb nem csúszik meg rajta.

4)

a)

Az m tömegű test a nyugvó rendszerben a rúd irányára merőlegesen gyorsul, mert ebbe az irányba hat a rúd által kifejtett kényszererő. Legyen a test nyugvó rendszerbeli gyorsulása a_1 , a rúdhoz viszonyított gyorsulása a_r ! Az ábra alapján a rúdhoz viszonyított gyorsulás:

$$a_r = a \cos \alpha.$$

Ezzel a gyorsulással mozog a rúdhoz képest, ezért a lecsúszás pillanatában:

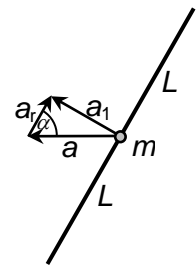
$$L = \frac{a_r}{2} t^2,$$

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a \cos \alpha}} = 2 \text{ s.}$$

b) A dinamika alapegyenletéből:

$$ma_1 = K,$$

$$K = ma \sin \alpha \approx 0,14 \text{ N.}$$



IV. kategória, Szakközépiskola 10. évfolyam

1)

Súlytalan csigasorral 1,67 N erőre lenne szükség. Azért van nagyobb erőre szükség, mert a csigasor nem súlytalan.

Figyelembe kell venni, hogy az alsó testre ható erők között

$$\begin{aligned}6F &= mg + Mg \\6 \frac{Mg}{5} &= mg + Mg \\ \frac{M}{5} &= m = 0,2 \text{ kg}\end{aligned}$$

Az alsó mozgócsigasor tömege az alsó test tömegének ötödrésze.

A rögzítésnél fellépő erő:

$$7F + mg = F_k = 16 \text{ N}$$

2)

A szögelfordulások is, az utak (ívek) is úgy aránylanak egymáshoz, mint a páratlan számok:

$$s_1 : s_2 : s_3 : s_4 = 1 : 3 : 5 : 7.$$

Ez alapján: $s_1 = \frac{1}{5} \cdot s_3 = 7 \text{ cm}$, $s_2 = 3 \cdot s_1 = 21 \text{ cm}$, $s_4 = 7 \cdot s_1 = 49 \text{ cm}$.

a)

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = \frac{2}{3} \cdot K \Rightarrow K = \frac{3}{2} \cdot (s_1 + s_2 + s_3 + s_4) = 168 \text{ cm}, R = \frac{K}{2\pi} \approx 26,74 \text{ cm}.$$

b)

$s_5 = 9 \cdot s_1 = 63 \text{ cm}$. Az eddig megtett összes út:

$(7 + 21 + 35 + 49 + 63) \text{ cm} = 175 \text{ cm} = 168 \text{ cm} + 7 \text{ cm}$. Ott lesz a test, ahol az 1. időtartam végén volt.

c)

A 2. és a 4. időtartam között a test $s_3 + s_4 = 84 \text{ cm} = \frac{1}{2} K$ utat tesz meg. A két sebesség egymással párhuzamos és ellentétes irányú, valamint $v_4 = 2 \cdot v_2$.

3)

a)

A feltétel szerint

$$p_0 - p_1 = p_2 - p_0.$$

Gay-Lussac II. törvénye alapján

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

A két egyenletből:

$$p_1 = \frac{2p_0}{1 + \frac{T_2}{T_1}} = 92,7 \text{ kPa}$$

A tartályba tölthető gázmennyiség:

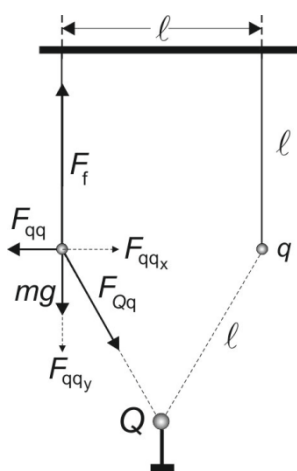
$$m = \frac{p_1 VM}{RT_1} = 12,3 \text{ g}$$

b)

A túlnyomás: $p_t = p_2 - p_0 = p_0 - p_1 = 7,3 \text{ kPa}$

4)

Egyensúlyban a fonalakra függesztett golyókra ható eredő erő zérus. A három golyó középpontja egyazon függőleges síkban helyezkedik el. A szimmetria miatt elegendő csak az egyik golyóra ható erőket vizsgálni. Ezek: az mg nehézségi erő, az F_{qq} elektromos erő, amit a másik felfüggesztett test fejt ki, a harmadik az F_{Qq} elektromos erő, amit a keresett töltés fejt ki, végül az F_f fonálerő, amit a felfüggesztés fejt ki a vizsgált golyóra. Az ábra ezeket mutatja:



Az erők eredője vízszintes irányban:

$$\sum F_x = F_{qqx} - F_{Qqx} = F_{qqx} - \frac{F_{Qq}}{2} = 0, \quad (1)$$

ahol $F_{Qqx} = \frac{F_{Qq}}{2}$, felhasználtuk, hogy a három gömböcske egyenlő oldalú háromszög csúcaiban helyezkedik el, és így az F_{Qq} erő vízszintes összetevője éppen fele az F_{Qq} erőnek.

Az erők eredője függőleges irányban (abszolút értékekkel kifejezve):

$$\sum F_y = mg + F_{Qqy} - F_f = mg + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{Qq} - F_f = 0, \quad (2)$$

ahol az egyenlő oldalú háromszög *magasságát* megadó megfelelő kifejezést alkalmaztuk az F_{Qqy} függőleges erőösszetevőre.

a) (1)-be és (2)-be beírva a megfelelő erőtörvényeket:

$$k \frac{q^2}{\ell^2} - k \frac{qQ}{2\ell^2} = 0, \quad (1')$$

$$(2')$$

(1')-ből egyszerűsítés után a keresett Q töltés meghatározható:

$$Q = 2q = 2 \cdot (-6 \cdot 10^{-7}) \text{ C} = -1,2 \cdot 10^{-6} \text{ C}.$$

b) A kapott eredményt (2')-be írva a fonalakban ható erő:

$$F_f = mg + \frac{\sqrt{3}}{2} k \frac{qQ}{l^2} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{(-6 \cdot 10^{-7} \text{ C}) \cdot (-1,2 \cdot 10^{-6} \text{ C})}{0,1^2 \text{ m}^2} = 0,611 \text{ N}$$