

A 35. Mikola Sándor Fizikaverseny feladatainak megoldása
Döntő - Gimnázium 10. osztály
Pécs 2016

1. feladat:

- a) Abban az esetben, ha labdát a lehető legnagyobb sebességgel indítjuk, akkor vízszintes hajítással a legrövidebb idő alatt teszi meg vízszintes irányban az L utat. Függőleges irányban a süllyedése a legkisebb, tehát az ablak legfelső pontján kell áthaladnia.



Legyen az áthaladásig eltelt idő t_{min} ! A vízszintes hajítás összefüggései alapján:

$$h_0 - h - d = \frac{g}{2} t_{min}^2, \quad \text{2 pont}$$

$$L = v_{max} \cdot t_{min} \quad \text{2 pont}$$

Ezekből:

$$t_{min} = \sqrt{\frac{2(h_0 - h - d)}{g}} = 0,47 \text{ s.}$$

$$\boxed{v_{max} = \frac{L}{t_{min}} = \frac{12 \text{ m}}{0,47 \text{ s}} = 25,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.} \quad \text{2 pont}$$

- b) A labdát a legkisebb sebességgel indítva, az a vízszintes talajon pattogva jut el az ablakhoz. Vizsgáljuk meg, hogy hányat pattanhat a vízszintes talajon, figyelembe véve, hogy az egymás utáni pattanások során az emelkedési magasság 30%-kal csökken! Az n -edik pattanás után az emelkedési magasság:

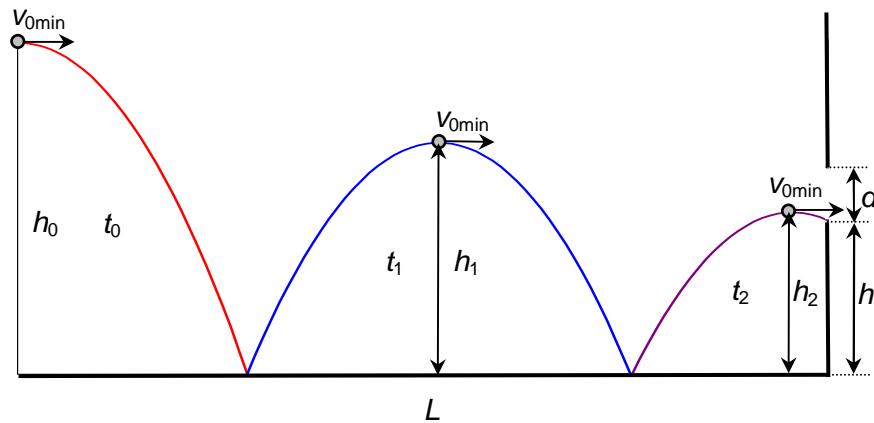
$$h_n = h_0 \cdot 0,7^n. \quad \text{2 pont}$$

Az áthaladás feltétele, hogy a lehető legnagyobb n érték esetén is teljesüljön, hogy

$$h \leq h_0 \cdot 0,7^n,$$

$$\frac{h}{h_0} = 0,46 \leq 0,7^n.$$

Könnyű belátni, hogy n legnagyobb értéke csak 2 lehet. Az idő két pattanás esetén akkor lesz maximális, ha a labda a második pattanás után a leszálló ágban repül át az ablak legalsó pontján. A labda pályáját az ábrán látjuk.



A pálya egy vízszintes hajítási szakaszból, egy ferde hajítási szakaszból és egy be nem fejezett ferde hajítási szakaszból áll. Legyenek a levegőben töltött idők rendre t_0 , t_1 , t_2 ! A keresett minimális sebesség:

$$v_{\min} = \frac{L}{t_0 + t_1 + t_2}. \quad \text{2 pont}$$

Az emelkedési magasságok:

$$h_1 = 0,7h_0 = 2,1 \text{ m}, \quad \text{1 pont}$$

$$h_2 = 0,7^2 \cdot h_0 = 1,47 \text{ m}. \quad \text{1 pont}$$

A vízszintes hajítási szakaszban a levegőben töltött idő:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 0,775 \text{ s}. \quad \text{2 pont}$$

A ferde hajítás során a levegőben töltött időt úgy számolhatjuk könnyen, hogy két azonos vízszintes hajításra bontjuk.

$$t_1 = 2 \cdot \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 1,296 \text{ s}. \quad \text{2 pont}$$

A be nem fejezett ferde hajítást is felbonthatjuk két különböző vízszintes hajításra.

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} + \sqrt{\frac{2(h_2 - h)}{g}} = 0,66 \text{ s}. \quad \text{2 pont}$$

A keresett minimális sebesség az előzőek alapján:

$$v_{\min} = \frac{L}{t_0 + t_1 + t_2} = \frac{12 \text{ m}}{2,731 \text{ s}} = 4,39 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2 pont

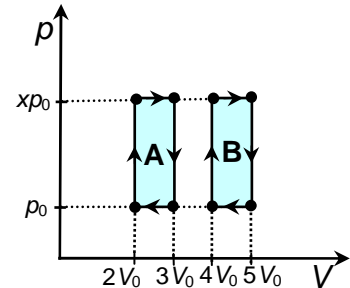
Összesen: 20 pont

2. feladat:

a) Legyen a körfolyamatok során a gáz legkisebb nyomása p_0 , a legnagyobb pedig xp_0 ! Az ábra alapján látható, hogy a két körfolyamat esetén a hasznos munka megegyezik, melynek értéke:

$$W_h^* = (x-1)p_0V_0. \quad 2 \text{ pont}$$

Így, annak a körfolyamatnak a hatásfoka nagyobb, amelyik esetben a felvett hő kisebb. Számoljuk ki ezeket az első főtétel felhasználásával!



$$Q_A = \frac{3}{2}(xp_0 \cdot 3V_0 - p_0 \cdot 2V_0) + xp_0 \cdot V_0,$$

$$Q_A = \left(\frac{11}{2}x - 3\right)p_0V_0. \quad 2 \text{ pont}$$

$$Q_B = \frac{3}{2}(xp_0 \cdot 5V_0 - p_0 \cdot 4V_0) + xp_0 \cdot V_0,$$

$$Q_B = \left(\frac{17}{2}x - 6\right)p_0V_0. \quad 2 \text{ pont}$$

A **B** körfolyamat esetén a hőfelvétel magasabb hőmérsékleteken történik, ezért tegyük fel, hogy

$$Q_A < Q_B,$$

$$\frac{11}{2}x - 3 < \frac{17}{2}x - 6,$$

$$1 < x.$$

Mivel esetünkben x értéke mindig nagyobb, mint 1. Tehát az **A** körfolyamat hatásfoka nagyobb.

$$\eta_B < \eta_A.$$

2 pont

b) Írjuk fel a hatásfokokat!

$$\eta_A = \frac{(x-1)p_0V_0}{\left(\frac{11}{2}x - 3\right)p_0V_0} = \frac{2(x-1)}{11x - 6}, \quad 2 \text{ pont}$$

$$\eta_B = \frac{(x-1)p_0V_0}{\left(\frac{17}{2}x-6\right)p_0V_0} = \frac{2(x-1)}{17x-12}. \quad \mathbf{2 \text{ pont}}$$

A feladat feltétele szerint:

$$\frac{\eta_A}{\eta_B} = \frac{3}{2},$$

$$\frac{17x-12}{11x-6} = \frac{3}{2},$$

$$x = 6. \quad \mathbf{2 \text{ pont}}$$

Tehát a gáz legnagyobb nyomása a körfolyamatok végzése közben $6p_0$. x értékét a körfolyamatok kifejezésébe beírva:

$$\eta_A = \frac{2(x-1)}{11x-6} = \frac{1}{6}. \quad \mathbf{1 \text{ pont}}$$

$$\eta_B = \frac{2(x-1)}{17x-12} = \frac{1}{9}. \quad \mathbf{1 \text{ pont}}$$

c) Az eddigiek alapján a hatásfokok aránya:

$$f(x) = \frac{\eta_A}{\eta_B} = \frac{17x-12}{11x-6}. \quad \mathbf{2 \text{ pont}}$$

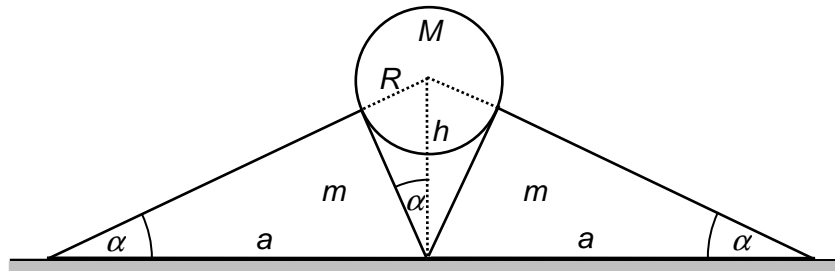
Keressük az $f(x)$ függvény maximumát!

$$f(x) = \frac{\eta_A}{\eta_B} = \frac{17x-12}{11x-6} = \frac{17 - \frac{12}{x}}{11 - \frac{6}{x}} \rightarrow \frac{17}{11}. \quad \mathbf{2 \text{ pont}}$$

Összesen: 20 pont

3. feladat:

- a) Először határozzuk meg, hogy milyen magasan van a gömb tömegközéppontja a vízszintes felület felett, majd vizsgáljuk meg a testek elmozdulását a mozgás során! Ezekből összefüggéseket tudunk megállapítani a végsebességek, illetve az állandó gyorsulások között. Legyen a gömb sugara R , a tömegközéppont magassága h !

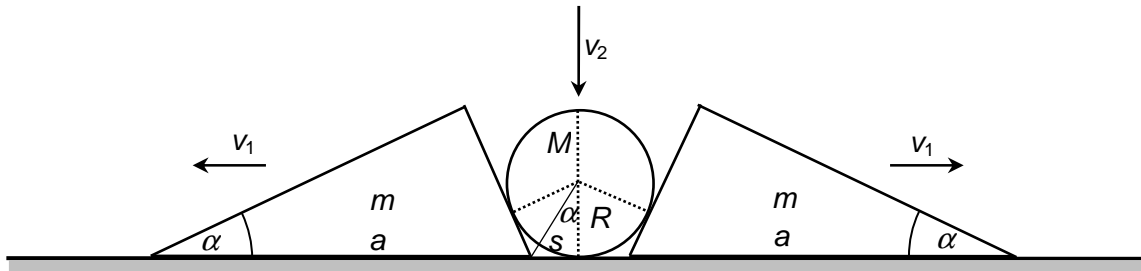


Az ábra alapján: $h = \frac{R}{\sin \alpha} = 2R$, 1 pont

$$h = a \operatorname{tg} \alpha,$$

$$R = \frac{1}{2} a \cdot \operatorname{tg} \alpha = 5\sqrt{3} \text{ cm.}$$
 1 pont

Legyen a gömb sebessége a vízszintes felületre érkezéskor v_2 , az ékek sebessége v_1 , a gömb tömegközéppontjának elmozdulása Δh , az ékek elmozdulása s !



A gömb középpontjának elmozdulása:

$$\Delta h = h - R = R$$
 1 pont

Az ékek elmozdulása:

$$s = R \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$
 1 pont

Mivel a testek zérus kezdősebességgel és állandó gyorsulással azonos ideig mozogtak, a végsebességeik úgy aránylanak, mint a megtett útjaik:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\Delta h}{s} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \sqrt{3},$$
 1 pont

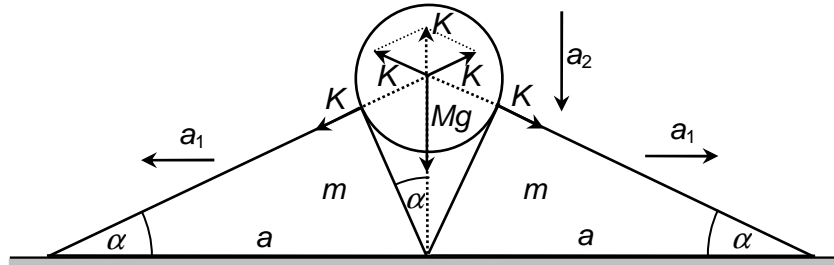
$$v_2 = \frac{v_1}{\operatorname{tg} \alpha} = \sqrt{3}v_1.$$

Hasonlóan a gyorsulásokra is:

$$a_2 = \frac{a_1}{\operatorname{tg} \alpha} = \sqrt{3} a_1.$$

1 pont

Az előkészületek után visszatérve a gyorsulások meghatározására, vegyük fel a testekre hatóerőket!



A testek mozgására a dinamika alapegyenletét felírva:

$$(1) \quad m a_1 = K \cos \alpha, \quad \mathbf{2 \text{ pont}}$$

$$(2) \quad M a_2 = M g - K, \quad \mathbf{2 \text{ pont}}$$

$$(3) \quad a_1 = a_2 \operatorname{tg} \alpha. \quad \mathbf{1 \text{ pont}}$$

(2)-t alakítva:

$$(4) \quad M a_2 \cos \alpha = M g \cos \alpha - K \cos \alpha.$$

(1) és (4) összeadásából a_1 értékét beírva:

$$m a_2 \operatorname{tg} \alpha + M a_2 \cos \alpha = M g \cos \alpha,$$

$$a_2 = \frac{M g \cos \alpha}{M \cos \alpha + m \operatorname{tg} \alpha}, \quad \mathbf{2 \text{ pont}}$$

$$a_2 = \frac{3M}{2m + 3m} g = \frac{9}{13} g \approx 6,92 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \mathbf{1 \text{ pont}}$$

$$a_1 = a_2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{13} g \approx 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad \mathbf{1 \text{ pont}}$$

b) A sebességeket meghatározhatjuk az energia-megmaradásból is.

$$M g \cdot 2R = 2 \cdot \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} M v_2^2 + M g R, \quad \mathbf{2 \text{ pont}}$$

ahol
$$v_2 = \frac{v_1}{\operatorname{tg} \alpha} = \sqrt{3} v_1.$$

$$2MgR = 2m v_1^2 + 3M v_1^2,$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2M}{2m+3M} \cdot gR}, \quad \text{1 pont}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{13} \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 0,63 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \text{1 pont}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{9\sqrt{3}}{13} \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 1,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad \text{1 pont}$$

Összesen: 20 pont

4. feladat:

a) Az elengedett test v_0 sebességét a munkatétel alapján számolhatjuk.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - 0 = EQ \cdot L,$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2EQL}{m}} = \frac{\pi}{10} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,314 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad \text{2 pont}$$

A dinamika alapegyenletéből:

$$m \frac{v_0^2}{L} = K - EQ - k \frac{Q^2}{L^2},$$

$$K = 3EQ + k \frac{Q^2}{L^2} = 3\pi^2 \cdot 10^{-3} \text{ N} + 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ N},$$

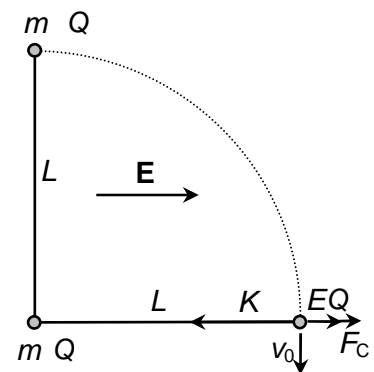
$$K = 3,19 \cdot 10^{-2} \text{ N}. \quad \text{2 pont}$$

b) A rögzítés megszüntetése után úgy vizsgálhatjuk legegyszerűbben a testek mozgását, hogy vizsgáljuk a rendszer tömegközéppontjának mozgását, és a testek tömegközéppont körüli forgását. A tömegközéppontra vonatkozóan a rendszerre ható erők forgatónyomatékainak eredője végig zérus, ezért a rendszer kezdeti ω_0 szögsebessége a mozgás során nem változik. A rögzítés megszűnése utáni pillanatban a szögsebesség:

$$\omega_0 = \frac{v_0}{L} = \frac{\pi}{10L} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\text{s}}. \quad \text{2 pont}$$

Annyi idő múlva lesz fonál először merőleges a térerősség-vektorra, ami alatt a fonál a tömegközéppont körül $\varphi = \frac{\pi}{2}$ szöggel elfordul.

$$t_0 = \frac{\varphi}{\omega_0} = \frac{\pi}{2\omega_0} = 1 \text{ s}. \quad \text{2 pont}$$



Vizsgáljuk a tömegközéppont mozgását! A tömegközéppont az x irányban kezdősebesség nélkül állandó gyorsulással mozog, az y irányban pedig $\frac{v_0}{2}$ állandó sebességgel halad.

1 pont

A tömegközéppont gyorsulása x irányban:

$$a = \frac{2EQ}{2m} = \frac{\pi^2}{40} = 0,247 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad \text{1 pont}$$

A tömegközéppont elmozdulásai x és y irányban:

$$x_0 = \frac{a}{2} t_0^2 = 0,123 \text{ m}, \quad \text{1 pont}$$

$$y_0 = \frac{v_0}{2} t_0 = 0,157 \text{ m}. \quad \text{1 pont}$$

A kezdetben rögzített test elmozdulása:

$$d = \sqrt{\left(x_0 + \frac{L}{2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{L}{2}\right)^2} = 0,23 \text{ m}. \quad \text{2 pont}$$

c) A másik test sebességét ebben a pillanatban úgy kapjuk meg, hogy a tömegközéppont sebességéhez vektorilag hozzáadjuk a forgásból származó sebességet. A tömegközéppont sebességének komponensei:

$$v_x = at_0 = 0,247 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \text{1 pont}$$

$$v_y = \frac{v_0}{2} = 0,314 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad \text{1 pont}$$

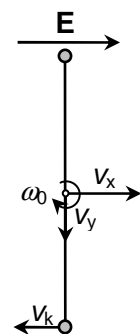
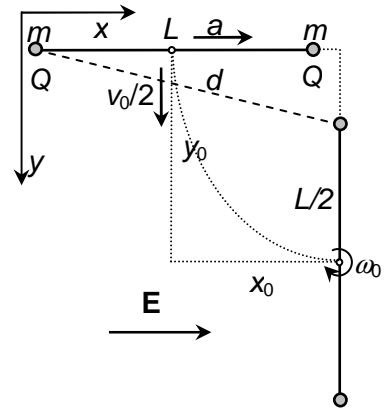
A tömegközéppont körüli forgásból származó kerületi sebesség:

$$v_k = \frac{L}{2} \omega_0 = \frac{v_0}{2} = \frac{\pi}{20} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,157 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad \text{1 pont}$$

A test keresett sebessége:

$$v_2 = \sqrt{(v_x - v_k)^2 + v_y^2} = 0,181 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad \text{3 pont}$$

Összesen: 20 pont



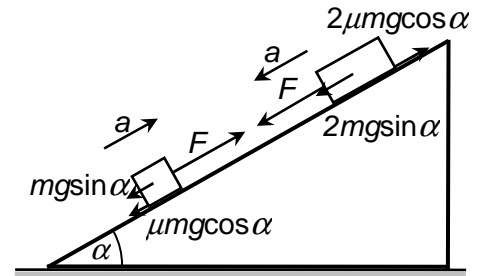
A 35. Mikola Sándor Fizikaverseny feladatainak megoldása
Döntő - Szakközépiskola 10. osztály
Pécs 2016

1. feladat:

a) Legyen a testek közös gyorsulása a , a rugó által kifejtett erő F ! Írjuk fel a rögzítés megszűnése utáni pillanatra a testek mozgásegyenleteit!

$$(1) \quad ma = F - mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha,$$

$$(2) \quad 2ma = F + 2mg \sin \alpha - 2\mu mg \cos \alpha.$$



8 pont

(2)-ből (1)-et kivonva:

$$(3) \quad ma = 3mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha.$$

2 pont

A keresett gyorsulás:

$$a = g \cdot (3 \sin \alpha - \mu \cos \alpha),$$

$$a = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 0,1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 14,13 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

2 pont

b) Legyen a rugó megnyúlása y ! (3)-at (1)-be beírva:

$$3mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = F - mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad \mathbf{3 \text{ pont}}$$

$$F = 4mg \sin \alpha,$$

$$Dy = 4mg \sin \alpha, \quad \mathbf{3 \text{ pont}}$$

$$y = \frac{4mg \sin \alpha}{D},$$

$$y = \frac{20 \text{ N}}{200 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0,1 \text{ m.}$$

2 pont

Összesen: 20 pont

2. feladat:

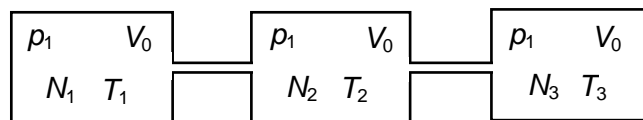
a) A felmelegítések utáni egyensúlyi állapotban a három tartályban a levegő nyomása azonos, p_1 lesz. A belső energiákra vonatkozó feltételt kihasználva:

$$E_{b1} = 2,5E_{b0}, \quad \text{2 pont}$$

$$\frac{f}{2} p_1 \cdot 3V_0 = 2,5 \cdot \frac{f}{2} p_0 \cdot 3V_0, \quad \text{4 pont}$$

$$\boxed{p_1 = 2,5 p_0 = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Pa.}} \quad \text{2 pont}$$

b) Legyen felmelegítések után kialakuló egyensúlyi állapotban a tartályokban lévő gázcseppcskék száma rendre: N_1, N_2, N_3 , kezdetben a részecskeszám összege $3N$!



A részecskeszám megmaradásából:

$$(1) \quad 3N = N_1 + N_2 + N_3. \quad \text{2 pont}$$

Írjuk fel a gázok termikus állapotegyenletét az egyes tartályokban lévő gázokra!

$$p_0 V_0 = N k T_0,$$

$$p_1 V_0 = N_1 k T_1,$$

$$p_1 V_0 = N_2 k T_2,$$

$$p_1 V_0 = N_3 k T_3 \quad \text{4 pont}$$

Ezekből a részecskeszámokat kifejezve, és az (1) egyenletbe beírva:

$$3 \cdot \frac{p_0 V_0}{k T_0} = \frac{p_1 V_0}{k T_1} + \frac{p_1 V_0}{k T_2} + \frac{p_1 V_0}{k T_3}, \quad \text{2 pont}$$

$$3 \cdot \frac{p_0}{p_1} \frac{1}{T_0} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}. \quad \text{2 pont}$$

Az adatokat beírva:

$$\frac{3}{600 \text{ K}} = \frac{1}{900 \text{ K}} + \frac{1}{600 \text{ K}} + \frac{1}{T_3}.$$

Ebből:

$$\boxed{T_3 = 450 \text{ K.}} \quad \text{2 pont}$$

Összesen: 20 pont

3. feladat:

a) Legyen az m tömegű test sebességének abszolút értéke a vályúból való kirepülés után v_1 , az M tömegűé pedig v_2 !

$$v_1 = v_r - v_2. \quad \mathbf{2 \text{ pont}}$$

A lendület-megmaradást a nyugvó rendszerben felírva:

$$mu = Mv_2 - mv_1, \quad \mathbf{2 \text{ pont}}$$

$$mu = Mv_2 - m(v_r - v_2). \quad \mathbf{2 \text{ pont}}$$

Ebből az M tömegű test sebessége:

$$v_2 = \frac{m}{m+M}(u + v_r), \quad \mathbf{2 \text{ pont}}$$

$$v_2 = \frac{2 \text{ kg}}{2 \text{ kg} + 8 \text{ kg}} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2 pont

A kirepülő test sebessége:

$$v_1 = v_r - v_2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2 pont

b) A súrlódási erő munkáját a mozgási energiák különbségéből számolhatjuk.

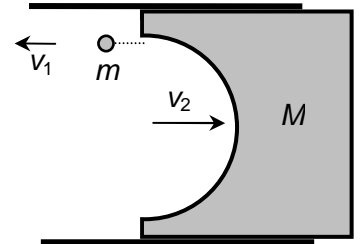
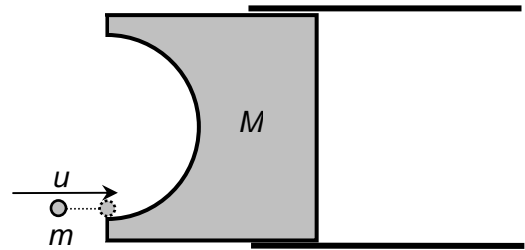
$$W_s = \frac{1}{2}mu^2 - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 \right), \quad \mathbf{6 \text{ pont}}$$

$$W_s = \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ kg} \cdot \left(15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \text{ kg} \cdot \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ kg} \cdot \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right],$$

$$W_s = 225 \text{ J} - (1 \text{ J} + 64 \text{ J}) = 160 \text{ J}.$$

2 pont

Összesen: 20 pont



4. feladat:

a) Az m tömegű test sebessége akkor lesz maximális, amikor a pálya érintőjének irányában a ráható erők eredője zérussá válik. Ebben a helyzetben a nehézségi erő érintő irányú komponense:

$$F_{nt} = mg \sin \alpha, \quad \text{4 pont}$$

az elektrosztatikus Coulomb erőé pedig:

$$F_{Ct} = F_C \sin \alpha. \quad \text{3 pont}$$

A feltételből:

$$mg \sin \alpha - F_C \sin \alpha = 0, \quad \text{2 pont}$$

$$F_C = mg = 0,2 \text{ N}. \quad \text{1 pont}$$

b) A kérdéses helyzetben a maximális sebesség pedig abból a feltételből határozható meg, hogy mozgás során a helyzeti, a mozgási és az elektrosztatikus potenciális energiák összege állandó. Legyen a töltött testek ismeretlen töltése Q_1 és Q_2 !

$$(1) \quad mgL + k \frac{Q_1 Q_2}{\sqrt{2}L} = mgL \cos \alpha + k \frac{Q_1 Q_2}{L} + \frac{1}{2} m v_{\max}^2. \quad \text{4 pont}$$

A Coulomb-törvényből:

$$k \frac{Q_1 Q_2}{L^2} = mg,$$

$$k \frac{Q_1 Q_2}{L} = mgL. \quad \text{2 pont}$$

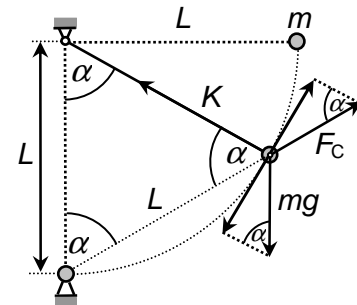
Ezt (1)-be beírva:

$$mgL + \frac{mgL}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} mgL + mgL + \frac{1}{2} m v_{\max}^2, \quad \text{2 pont}$$

$$\frac{gL}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} gL = \frac{1}{2} v_{\max}^2$$

$$v_{\max}^2 = gL(\sqrt{2} - 1),$$

$$\boxed{v_{\max} = \sqrt{gL(\sqrt{2} - 1)} \approx 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.} \quad \text{2 pont}$$



Összesen: 20 pont