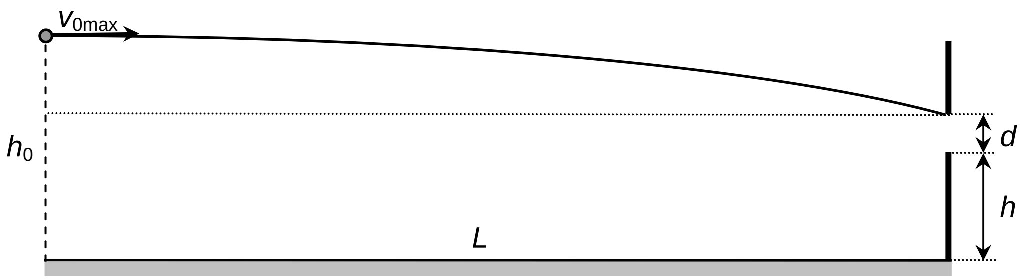
A 35. Mikola Sándor Fizikaverseny feladatainak megoldása
Döntő - Gimnázium 10. osztály
Pécs 2016

1. feladat:

a) Abban az esetben, ha labdát a lehető legnagyobb sebességgel indítjuk, akkor vízszintes hajítással a legrövidebb idő alatt teszi meg vízszintes irányban az *L* utat. Függőleges irányban a süllyedése a legkisebb, tehát az ablak legfelső pontján kell áthaladnia.



Legyen az áthaladásig eltelt idő t_{min}! A vízszintes hajítás összefüggései alapján:

$$h_0 - h - d = \frac{g}{2} t_{min}^2,$$ **2 pont**

$$L = v_{max} \cdot t_{min}$$ **2 pont**

Ezekből:

$$t_{min} = \sqrt{\frac{2(h_0 - h - d)}{g}} = 0{,}47 \text{ s}.$$

$$\boxed{v_{max} = \frac{L}{t_{min}} = \frac{12 \text{ m}}{0{,}47 \text{ s}} = 25{,}6 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.}$$ **2 pont**

b) A labdát a legkisebb sebességgel indítva, az a vízszintes talajon pattogva jut el az ablakhoz. Vizsgáljuk meg, hogy hányat pattanhat a vízszintes talajon, figyelembe véve, hogy az egymás utáni pattanások során az emelkedési magasság 30%-kal csökken! Az *n*-edik pattanás után az emelkedési magasság:

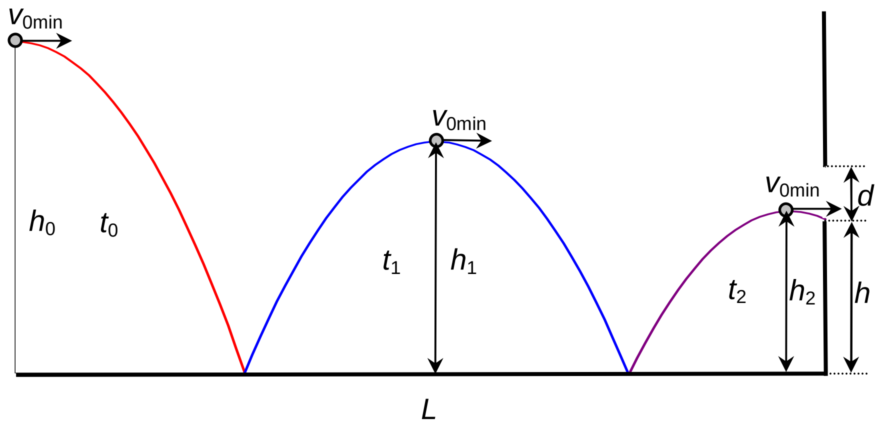
$$h_n = h_0 \cdot 0{,}7^n.$$ **2 pont**

Az áthaladás feltétele, hogy a lehető legnagyobb *n* érték esetén is teljesüljön, hogy

$$h \le h_0 \cdot 0{,}7^n,$$

$$\frac{h}{h_0} = 0{,}4\dot{6} \le 0{,}7^n.$$

Könnyű belátni, hogy *n* legnagyobb értéke csak 2 lehet. Az idő két pattanás esetén akkor lesz maximális, ha a labda a második pattanás után a leszálló ágban repül át az ablak legalsó pontján. A labda pályáját az ábrán látjuk.



A pálya egy vízszintes hajítási szakaszból, egy ferde hajítási szakaszból és egy be nem fejezett ferde hajítási szakaszból áll. Legyenek a levegőben töltött idők rendre t_0, t_1, t_2! A keresett minimális sebesség:

$$\upsilon_{\min} = \frac{L}{t_0 + t_1 + t_2}.$$ **2 pont**

Az emelkedési magasságok:

$$h_1 = 0{,}7 h_0 = 2{,}1\ \text{m},$$ **1 pont**

$$h_2 = 0{,}7^2 \cdot h_0 = 1{,}47\ \text{m}.$$ **1 pont**

A vízszintes hajítási szakaszban a levegőben töltött idő:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 0{,}775\ \text{s}.$$ **2 pont**

A ferde hajítás során a levegőben töltött időt úgy számolhatjuk könnyen, hogy két azonos vízszintes hajításra bontjuk.

$$t_1 = 2 \cdot \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 1{,}296\ \text{s}.$$ **2 pont**

A be nem fejezett ferde hajítást is felbonthatjuk két különböző vízszintes hajításra.

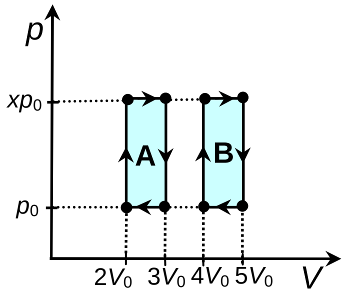
$$t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} + \sqrt{\frac{2(h_2 - h)}{g}} = 0{,}66\ \text{s}.$$ **2 pont**

A keresett minimális sebesség az előzőek alapján:

$$\boxed{v_{\min} = \frac{L}{t_0 + t_1 + t_2} = \frac{12\ \text{m}}{2{,}731\ \text{s}} = 4{,}39\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.}$$ **2 pont**

Összesen: 20 pont

2. feladat:



a) Legyen a körfolyamatok során a gáz legkisebb nyomása p_0, a legnagyobb pedig xp_0! Az ábra alapján látható, hogy a két körfolyamat esetén a hasznos munka megegyezik, melynek értéke:

$$W_\text{h}^* = (x-1)p_0V_0.$$ **2 pont**

Így, annak a körfolyamatnak a hatásfoka nagyobb, amelyik esetben a felvett hő kisebb. Számoljuk ki ezeket az első főtétel felhasználásával!

$$Q_\text{A} = \frac{3}{2}\left(xp_0 \cdot 3V_0 - p_0 \cdot 2V_0\right) + xp_0 \cdot V_0,$$

$$Q_\text{A} = \left(\frac{11}{2}x - 3\right)p_0V_0.$$ **2 pont**

$$Q_\text{B} = \frac{3}{2}\left(xp_0 \cdot 5V_0 - p_0 \cdot 4V_0\right) + xp_0 \cdot V_0,$$

$$Q_\text{B} = \left(\frac{17}{2}x - 6\right)p_0V_0.$$ **2 pont**

A **B** körfolyamat esetén a hőfelvétel magasabb hőmérsékleteken történik, ezért tegyük fel, hogy

$$Q_\text{A} < Q_\text{B},$$

$$\frac{11}{2}x - 3 < \frac{17}{2}x - 6,$$

$$1 < x.$$

Mivel esetünkben x értéke mindig nagyobb, mint 1. Tehát az **A** körfolyamat hatásfoka nagyobb.

$$\boxed{\eta_B < \eta_A\,.}$$ **2 pont**

b) Írjuk fel a hatásfokokat!

$$\eta_A = \frac{(x-1)p_0V_0}{\left(\frac{11}{2}x - 3\right)p_0V_0} = \frac{2(x-1)}{11x-6},$$ **2 pont**

$$\eta_{\mathrm{B}} = \frac{(x-1)p_0V_0}{\left(\frac{17}{2}x-6\right)p_0V_0} = \frac{2(x-1)}{17x-12}.$$ **2 pont**

A feladat feltétele szerint:

$$\frac{\eta_A}{\eta_B} = \frac{3}{2},$$

$$\frac{17x-12}{11x-6} = \frac{3}{2},$$

$$x = 6.$$ **2 pont**

Tehát a gáz legnagyobb nyomása a körfolyamatok végzése közben $6p_0$. x értékét a körfolyamatok kifejezésébe beírva:

$$\boxed{\eta_A = \frac{2(x-1)}{11x-6} = \frac{1}{6}.}$$ **1 pont**

$$\boxed{\eta_{\mathrm{B}} = \frac{2(x-1)}{17x-12} = \frac{1}{9}.}$$ **1 pont**

c) Az eddigiek alapján a hatásfokok aránya:

$$f(x) = \frac{\eta_A}{\eta_B} = \frac{17x-12}{11x-6}.$$ **2 pont**

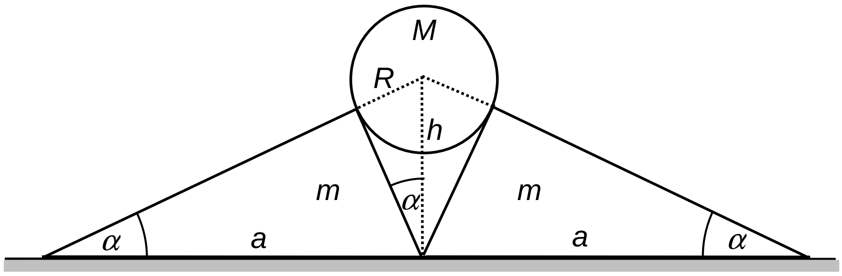
Keressük az $f(x)$ függvény maximumát!

$$\boxed{f(x) = \frac{\eta_A}{\eta_B} = \frac{17x-12}{11x-6} = \frac{17-\frac{12}{x}}{11-\frac{6}{x}} \to \frac{17}{11}.}$$ **2 pont**

Összesen: 20 pont

3. feladat:

a) Először határozzuk meg, hogy milyen magasan van a gömb tömegközéppontja a vízszintes felület felett, majd vizsgáljuk meg a testek elmozdulását a mozgás során! Ezekből összefüggéseket tudunk megállapítani a végsebességek, illetve az állandó gyorsulások között. Legyen a gömb sugara R, a tömegközéppont magassága h!

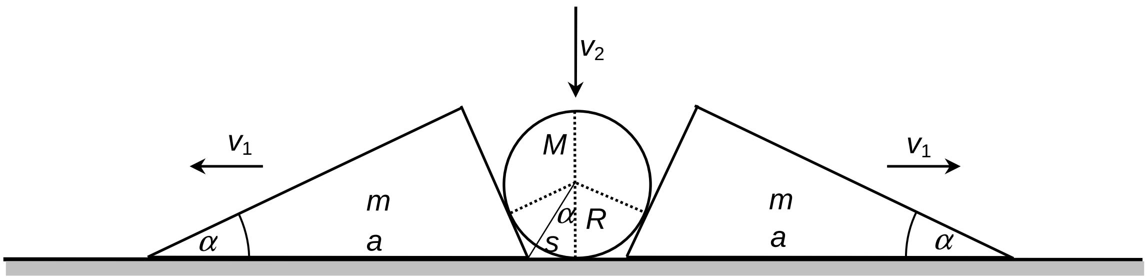


Az ábra alapján: $h = \dfrac{R}{\sin\alpha} = 2R,$ **1 pont**

$$h = a\,\mathrm{tg}\alpha,$$

$R = \dfrac{1}{2}a \cdot \mathrm{tg}\alpha = 5\sqrt{3}$ cm. **1 pont**

Legyen a gömb sebessége a vízszintes felületre érkezéskor υ_2, az ékek sebessége υ_1, a gömb tömegközéppontjának elmozdulása Δh, az ékek elmozdulása s!



A gömb középpontjának elmozdulása:

$\Delta h = h - R = R$ **1 pont**

Az ékek elmozdulása:

$s = R \cdot \mathrm{tg}\alpha.$ **1 pont**

Mivel a testek zérus kezdősebességgel és állandó gyorsulással azonos ideig mozogtak, a végsebességeik úgy aránylanak, mint a megtett útjaik:

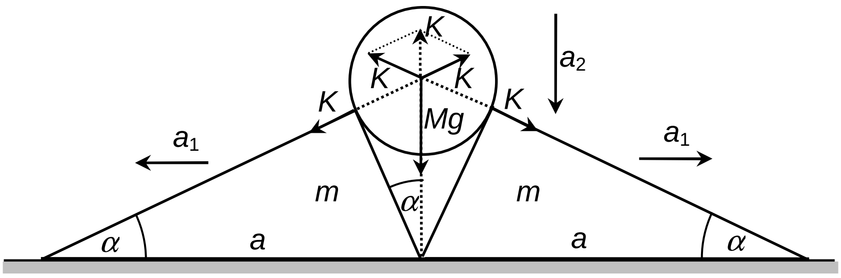
$\dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \dfrac{\Delta h}{s} = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \sqrt{3},$ **1 pont**

$$\upsilon_2 = \frac{\upsilon_1}{\mathrm{tg}\alpha} = \sqrt{3}\upsilon_1.$$

Hasonlóan a gyorsulásokra is:

$$a_2 = \frac{a_1}{\mathrm{tg}\alpha} = \sqrt{3}a_1.$$ **1 pont**

Az előkészületek után visszatérve a gyorsulások meghatározására, vegyük fel a testekre hatóerőket!



A testek mozgására a dinamika alapegyenletét felírva:

(1) $ma_1 = K\cos\alpha,$ **2 pont**

(2) $Ma_2 = Mg - K,$ **2 pont**

(3) $a_1 = a_2\mathrm{tg}\alpha.$ **1 pont**

(2)-t alakítva:

(4) $Ma_2\cos\alpha = Mg\cos\alpha - K\cos\alpha.$

(1) és (4) összeadásából a_1 értékét beírva:

$$ma_2\mathrm{tg}\alpha + Ma_2\cos\alpha = Mg\cos\alpha,$$

$$a_2 = \frac{Mg\cos\alpha}{M\cos\alpha + m\,\mathrm{tg}\alpha},$$ **2 pont**

$$\boxed{a_2 = \frac{3M}{2m+3m}g = \frac{9}{13}g \approx 6{,}92\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},}$$ **1 pont**

$$\boxed{a_1 = a_2\mathrm{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{13}g \approx 4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.}$$ **1 pont**

b) A sebességeket meghatározhatjuk az energia-megmaradásból is.

$$Mg\cdot 2R = 2\cdot\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 + MgR,$$ **2 pont**

ahol $v_2 = \frac{v_1}{\mathrm{tg}\alpha} = \sqrt{3}v_1.$

$$2MgR = 2mv_1^2 + 3Mv_1^2,$$

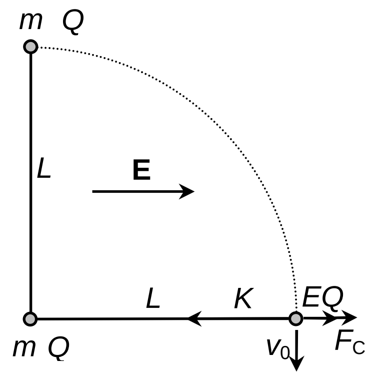
$$v_1 = \sqrt{\frac{2M}{2m+3M} \cdot gR},$$ **1 pont**

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{13}}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 0{,}63\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},}$$ **1 pont**

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{9\sqrt{3}}{13}}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 1{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.}$$ **1 pont**

Összesen: 20 pont

4. feladat:



a) Az elengedett test v_0 sebességét a munkatétel alapján számolhatjuk.

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - 0 = EQ \cdot L,$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2EQL}{m}} = \frac{\pi}{10}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}314\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.}$$ **2 pont**

A dinamika alapegyenletéből:

$$m\frac{v_0^2}{L} = K - EQ - k\frac{Q^2}{L^2},$$

$$K = 3EQ + k\frac{Q^2}{L^2} = 3\pi^2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N} + 2{,}25 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N},$$

$$\boxed{K = 3{,}19 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N}.}$$ **2 pont**

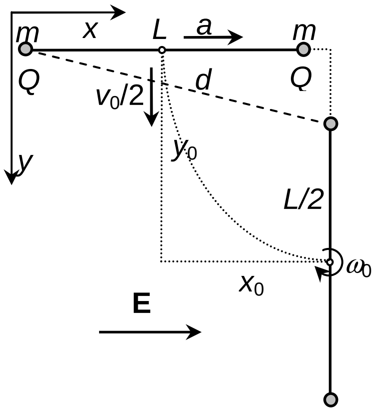
b) A rögzítés megszüntetése után úgy vizsgálhatjuk legegyszerűbben a testek mozgását, hogy vizsgáljuk a rendszer tömegközéppontjának mozgását, és a testek tömegközéppont körüli forgását. A tömegközéppontra vonatkozóan a rendszerre ható erők forgatónyomatékainak eredője végig zérus, ezért a rendszer kezdeti ω_0 szögsebessége a mozgás során nem változik. A rögzítés megszűnése utáni pillanatban a szögsebesség:

$$\omega_0 = \frac{v_0}{L} = \frac{\pi}{10L} = \frac{\pi}{2}\ \frac{1}{s}.$$ **2 pont**

Annyi idő múlva lesz fonál először merőleges a térerősség-vektorra, ami alatt a fonál a tömegközéppont körül $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ szöggel elfordul.

$$t_0 = \frac{\varphi}{\omega_0} = \frac{\pi}{2\omega_0} = 1\ \mathrm{s}.$$ **2 pont**

Vizsgáljuk a tömegközéppont mozgását! A tömegközéppont az x irányban kezdősebesség nélkül állandó gyorsulással mozog, az y irányban pedig $\frac{\upsilon_0}{2}$ állandó sebességgel halad. **1 pont**



A tömegközéppont gyorsulása x irányban:

$$a = \frac{2EQ}{2m} = \frac{\pi^2}{40} = 0{,}247\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$ **1 pont**

A tömegközéppont elmozdulásai x és y irányban:

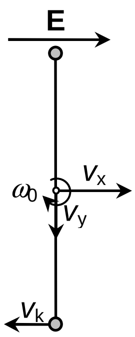
$$x_0 = \frac{a}{2} t_0^2 = 0{,}123\ \text{m},$$ **1 pont**

$$y_0 = \frac{\upsilon_0}{2} t_0 = 0{,}157\ \text{m}.$$ **1 pont**

A kezdetben rögzített test elmozdulása:

$$\boxed{d = \sqrt{\left(x_0 + \frac{L}{2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{L}{2}\right)^2} = 0{,}23\ \text{m}.}$$ **2 pont**

c) A másik test sebességét ebben a pillanatban úgy kapjuk meg, hogy a tömegközéppont sebességéhez vektorilag hozzáadjuk a forgásból származó sebességet. A tömegközéppont sebességének komponensei:



$$\upsilon_x = a t_0 = 0{,}247\ \frac{\text{m}}{\text{s}},$$ **1 pont**

$$\upsilon_y = \frac{\upsilon_0}{2} = 0{,}314\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$ **1 pont**

A tömegközéppont körüli forgásból származó kerületi sebesség:

$$\upsilon_k = \frac{L}{2}\omega_0 = \frac{\upsilon_0}{2} = \frac{\pi}{20}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}157\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$ **1 pont**

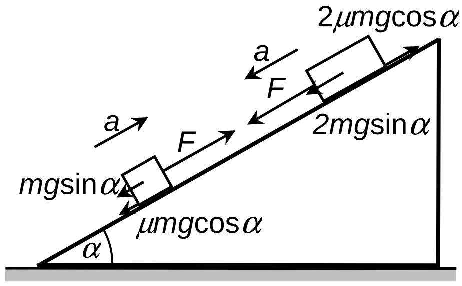
A test keresett sebessége:

$$\boxed{\upsilon_2 = \sqrt{(\upsilon_x - \upsilon_k)^2 + \upsilon_y^2} = 0{,}181\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.}$$ **3 pont**

Összesen: 20 pont

A 35. Mikola Sándor Fizikaverseny feladatainak megoldása
Döntő - Szakközépiskola 10. osztály
Pécs 2016

1. feladat:



a) Legyen a testek közös gyorsulása a, a rugó által kifejtett erő F! Írjuk fel a rögzítés megszűnése utáni pillanatra a testek mozgásegyenleteit!

(1) $ma = F - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha,$

(2) $2ma = F + 2mg\sin\alpha - 2\mu mg\cos\alpha.$

8 pont

(2)-ből (1)-et kivonva:

(3) $ma = 3mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha.$ **2 pont**

A keresett gyorsulás:

$$a = g\cdot(3\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$

$$\boxed{a = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\left(\frac{3}{2} - 0{,}1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 14{,}13\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.}$$ **2 pont**

b) Legyen a rugó megnyúlása y! (3)-at (1)-be beírva:

$3mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = F - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha,$ **3 pont**

$F = 4mg\sin\alpha,$

$Dy = 4mg\sin\alpha,$ **3 pont**

$$y = \frac{4mg\sin\alpha}{D},$$

$$\boxed{y = \frac{20\ \mathrm{N}}{200\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} = 0{,}1\ \mathrm{m}.}$$ **2 pont**

Összesen: 20 pont

2. feladat:

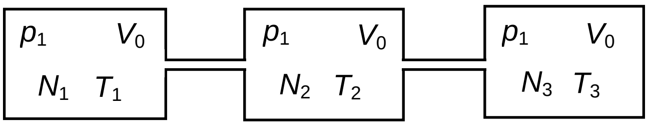
a) A felmelegítések utáni egyensúlyi állapotban a három tartályban a levegő nyomása azonos, p_1 lesz. A belső energiákra vonatkozó feltételt kihasználva:

$$E_{b1} = 2{,}5 E_{b0},$$ **2 pont**

$$\frac{f}{2} p_1 \cdot 3V_0 = 2{,}5 \cdot \frac{f}{2} p_0 \cdot 3V_0,$$ **4 pont**

$$\boxed{p_1 = 2{,}5 p_0 = 2{,}5 \cdot 10^5 \text{ Pa.}}$$ **2 pont**

b) Legyen felmelegítések után kialakuló egyensúlyi állapotban a tartályokban lévő gázrészecskék száma rendre: N_1, N_2, N_3, kezdetben a részecskeszám összege $3N$!



A részecskeszám megmaradásából:

(1) $$3N = N_1 + N_2 + N_3.$$ **2 pont**

Írjuk fel a gázok termikus állapotegyenletét az egyes tartályokban lévő gázokra!

$$p_0 V_0 = N k T_0,$$

$$p_1 V_0 = N_1 k T_1,$$

$$p_1 V_0 = N_2 k T_2,$$

$$p_1 V_0 = N_3 k T_3$$ **4 pont**

Ezekből a részecskeszámokat kifejezve, és az (1) egyenletbe beírva:

$$3 \cdot \frac{p_0 V_0}{k T_0} = \frac{p_1 V_0}{k T_1} + \frac{p_1 V_0}{k T_2} + \frac{p_1 V_0}{k T_3},$$ **2 pont**

$$3 \cdot \frac{p_0}{p_1} \frac{1}{T_0} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}.$$ **2 pont**

Az adatokat beírva:

$$\frac{3}{600 \text{ K}} = \frac{1}{900 \text{ K}} + \frac{1}{600 \text{ K}} + \frac{1}{T_3}.$$

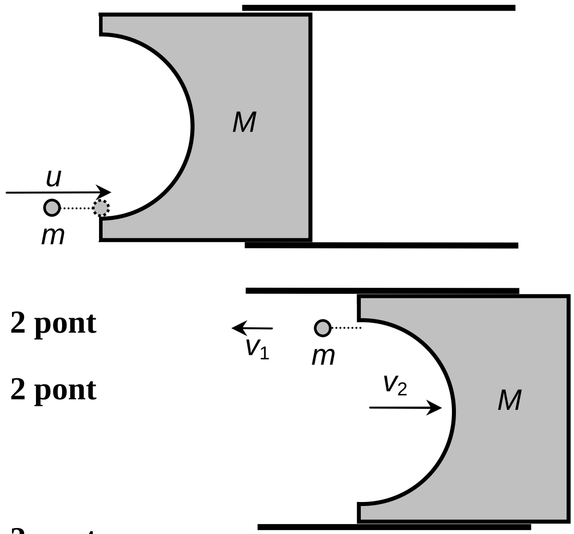
Ebből:

$$\boxed{T_3 = 450 \text{ K.}}$$ **2 pont**

Összesen: 20 pont

3. feladat:

a) Legyen az *m* tömegű test sebességének abszolút értéke a vályúból való kirepülés után υ_1, az *M* tömegűé pedig υ_2!



$$\upsilon_1 = \upsilon_r - \upsilon_2. \qquad \textbf{2 pont}$$

A lendület-megmaradást a nyugvó rendszerben felírva:

$$mu = M\upsilon_2 - m\upsilon_1, \qquad \textbf{2 pont}$$

$$mu = M\upsilon_2 - m(\upsilon_r - \upsilon_2). \qquad \textbf{2 pont}$$

Ebből az *M* tömegű test sebessége:

$$\upsilon_2 = \frac{m}{m+M}(u + \upsilon_r), \qquad \textbf{2 pont}$$

$$\boxed{\upsilon_2 = \frac{2\ \text{kg}}{2\ \text{kg} + 8\ \text{kg}} \cdot 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.} \qquad \textbf{2 pont}$$

A kirepülő test sebessége:

$$\upsilon_1 = \upsilon_r - \upsilon_2 = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}. \qquad \textbf{2 pont}$$

b) A súrlódási erő munkáját a mozgási energiák különbségéből számolhatjuk.

$$W_s = \frac{1}{2}mu^2 - \left(\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_2^2\right), \qquad \textbf{6 pont}$$

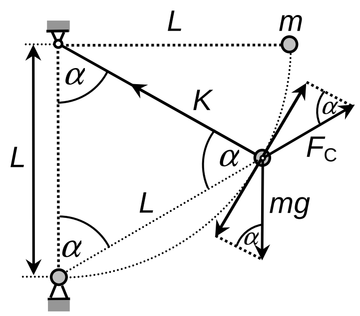
$$W_s = \frac{1}{2} \cdot 2\ \text{kg} \cdot \left(15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left[\frac{1}{2} \cdot 2\ \text{kg} \cdot \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 8\ \text{kg} \cdot \left(4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2\right],$$

$$\boxed{W_s = 225\ \text{J} - (1\ \text{J} + 64\ \text{J}) = 160\ \text{J}.} \qquad \textbf{2 pont}$$

Összesen: 20 pont

4. feladat:

a) Az *m* tömegű test sebessége akkor lesz maximális, amikor a pálya érintőjének irányában a ráható erők eredője zérussá válik. Ebben a helyzetben a nehézségi erő érintő irányú komponense:



$$F_{nt} = mg\sin\alpha, \qquad \textbf{4 pont}$$

az elektrosztatikus Coulomb erőé pedig:

$$F_{Ct} = F_C \sin\alpha. \qquad \textbf{3 pont}$$

A feltételből:

$$mg\sin\alpha - F_C \sin\alpha = 0, \qquad \textbf{2 pont}$$

$$F_C = mg = 0{,}2\ \text{N}. \qquad \textbf{1 pont}$$

b) A kérdéses helyzetben a maximális sebesség pedig abból a feltételből határozható meg, hogy mozgás során a helyzeti, a mozgási és az elektrosztatikus potenciális energiák összege állandó. Legyen a töltött testek ismeretlen töltése Q_1 és Q_2!

$$(1) \qquad mgL + k\frac{Q_1Q_2}{\sqrt{2}L} = mgL\cos\alpha + k\frac{Q_1Q_2}{L} + \frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2. \qquad \textbf{4 pont}$$

A Coulomb-törvényből:

$$k\frac{Q_1Q_2}{L^2} = mg,$$

$$k\frac{Q_1Q_2}{L} = mgL. \qquad \textbf{2 pont}$$

Ezt (1)-be beírva:

$$mgL + \frac{mgL}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}mgL + mgL + \frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2, \qquad \textbf{2 pont}$$

$$\frac{gL}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}gL = \frac{1}{2}\upsilon_{\max}^2$$

$$\upsilon_{\max}^2 = gL\left(\sqrt{2}-1\right),$$

$$\boxed{\upsilon_{\max} = \sqrt{gL\left(\sqrt{2}-1\right)} \approx 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.} \qquad \textbf{2 pont}$$

Összesen: 20 pont