

35. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny

III. forduló

2016. május 1. Gyöngyös, 9. évfolyam

Szakközépiskola

1. feladat. Soma, amikor a $d = 50$ m széles folyón a partra merőlegesen evez, akkor $d/2$ távolsággal sodródik lefelé. Egy másik alkalommal Soma és Márton ugyanarról a helyről egyszerre kezd evezni a vízhez viszonyítva egymásra merőleges irányban, és egyszerre érnek a túoldalra. Soma most pontosan az indulási hellyel szemben ér partot. Tegyük fel, hogy a folyó sebessége minden pontban ugyanakkora, és a gyerekek állandó, de egymástól eltérő sebességgel eveznek.

- Adjuk meg Márton és Soma vízhez viszonyított sebességének arányát!
- Egymástól milyen távol érnek partot a gyerekek?

(Simon Péter)

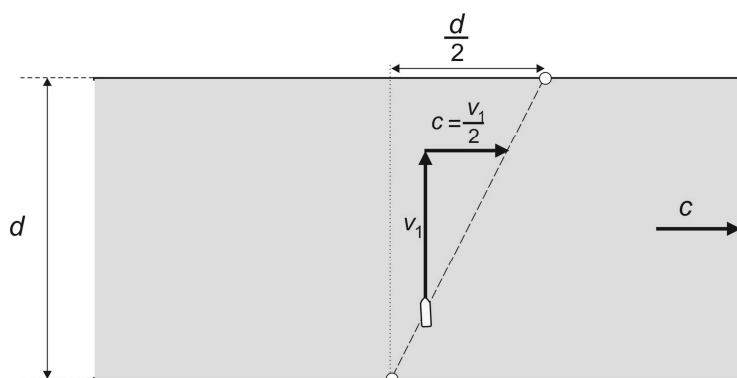
Megoldás. *a)* Soma vízhez viszonyított sebességét jelöljük v_1 -gyel, a folyó sebességét c -vel!

Az első alkalomra vonatkozó adatokból Soma mindenkor sebessége a folyó sebességével kifejezhető. Soma sodródásának és átkelésének menetideje egyenlő:

$$\frac{d/2}{c} = \frac{d}{v_1}.$$

A folyó sebessége:

$$c = \frac{v_1}{2}.$$



A második alkalommal Soma csak úgy érhet a kiindulási ponttal szemközti partot, hogy a folyón ferdén *felfelé* evez úgy, hogy v_1 sebességének folyás irányú összetevője éppen

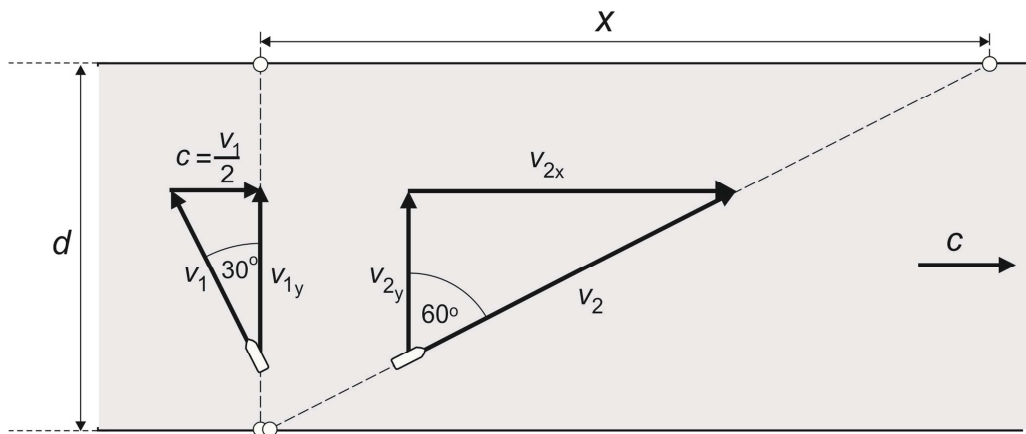
$$\frac{v_1}{2} \quad (= c)$$

nagyságú legyen. Ebből következik, hogy Soma v_1 sebessége most 30° -ot zár be a partra merőleges iránnyal.

Soma sebességének partra merőleges komponense

$$v_{1y} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_1.$$

Márton v_2 sebessége a feladat szerint merőleges Soma sebességére, tehát 60° -ot zár be a partra merőleges iránnyal.



Soma és Márton akkor ér egyszerre a túlpartra, ha a partra merőleges sebességkomponenseik egyenlők:

$$v_{1,y} = v_{2,y}$$

A két sebesség-háromszög hasonló, ezért a megfelelő oldalainak az aránya egyenlő:

$$\frac{v_2}{v_{2,y}} = \frac{v_1}{v_1/2} \rightarrow v_2 = 2v_{2,y} = 2v_{1,y} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 = \sqrt{3} v_1$$

Márton és Soma vízhez viszonyított sebességeinek aránya innen:

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{3}.$$

b) Márton sodródásának és átkelésének menetideje egyenlő:

$$\frac{x}{c + v_{2,x}} = \frac{d}{v_{2,y}},$$

ahol az ábrából

$$v_{2,x} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot v_1 = \frac{3}{2} v_1$$

$$\frac{x}{\frac{1}{2} v_1 + \frac{3}{2} v_1} = \frac{d}{\frac{\sqrt{3}}{2} v_1}.$$

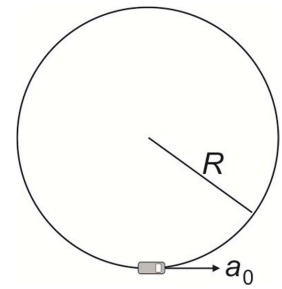
$$x = \frac{4\sqrt{3}}{3} d \approx 2,31 \cdot d = 115,5 \text{ m.},$$

tehát a gyerekek egymástól $x = 115,5 \text{ m}$ távolságban érnek partot.

2. feladat. Vízszintes érdes síkon, $R = 2$ m sugarú körpályán távirányítású kisméretű játékautó nyugalomból indulva egyenletesen növeli sebességét. A mindvégig állandó nagyságú pályamenti gyorsulása $a_0 = 2$ m/s². A kerekek és a talaj közötti tapadási súrlódási együttható $\mu = 0,6$.

- Indulástól számítva mekkora utat tesz meg az autó a megcsúszásig?
- Mekkora volt a kisautó maximális sebessége?
- Mennyi idő telt el ezalatt?

(Számoljunk $g = 10$ m/s²-tel!)

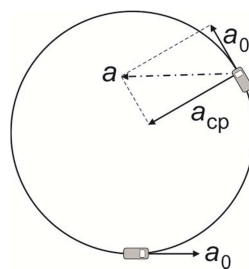


(Holics László)

Megoldás. A kis autó egyre nagyobb sebességet szerez. Az egyenletesen változó körmozgás fenntartásához egyre nagyobb centripetális erőre van szükség, amit a tapadási súrlódási erő biztosít. Ugyanez az erő okozza a pálya érintő irányú gyorsulását is.

A kis autó gyorsulását két, egymásra merőleges összetevőre bonthatjuk. Az érintő irányú gyorsulás a mozgás kezdetétől fogva állandó nagyságú, a kör középpontja felé mutató centripetális gyorsulás azonban fokozatosan növekszik. Az eredő gyorsulás nagyságát így írhatjuk fel:

$$a = \sqrt{a_0^2 + a_{cp}^2}.$$



A centripetális gyorsulás a kör sugarától és a test sebességétől függ:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R},$$

ahol a sebesség a nyugalomból való indulás miatt a megtett úttól és a pálya menti (a_0) gyorsulástól így függ:

$$v = \sqrt{2a_0s}.$$

Ennek segítségével a centripetális gyorsulást kifejezhetjük a megtett út függvényeként:

$$a_{cp} = \frac{2a_0s}{R}.$$

A kis auto eredő gyorsulása tehát:

$$a = \sqrt{a_0^2 + a_{cp}^2} = \sqrt{a_0^2 + \left(\frac{2a_0s}{R}\right)^2} = a_0 \sqrt{1 + \frac{4s^2}{R^2}}.$$

Newton II. törvénye (mozgásegyenlet) szerint ezt a gyorsulást a külső erők eredője hozza létre. A vízszintes érdes síkon haladó testre ez csak a tapadó (később csúszó) súrlódási erő. A megcsúszás pillanatában az erő is és a gyorsulás is maximális értékű:

$$\mu mg = ma.$$

Ebbe a kis autó eredő gyorsulását beírva és a tömeggel egyszerűsítve:

$$\mu g = a_0 \sqrt{1 + \frac{4s^2}{R^2}}$$

adódik.

A bal oldal a tapadási súrlódási erő legnagyobb értéke az adott síkon, így itt annak a határesetét kaptuk meg, ami a megcsúszás kezdetéig még érvényes (ennél nagyobb sebességnél a kis autó letér a körpályáról). A számítások elvégzése után a keresett út hossza:

$$s = \frac{R}{2} \sqrt{\left(\frac{\mu g}{a_0}\right)^2 - 1}.$$

Számadatainkkal a kisautó megcsúszása az indulást követően

$$s = \frac{2 \text{ m}}{2} \sqrt{\left(\frac{0,6 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}\right)^2 - 1} = 2,83 \text{ m}$$

út megtétele után következik be.

b) Az elért maximális sebesség

$$v = \sqrt{2a_0 s} = \sqrt{2 \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2,83 \text{ m}} = 3,36 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

volt.

c) Indulástól a megcsúszásig pedig

$$s = \frac{v}{2} t \quad \rightarrow \quad t = \frac{2s}{v} = \frac{2 \cdot 2,83 \text{ m}}{3,36 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,68 \text{ s}$$

idő telt el.

Rövid megoldás:

Az eredő gyorsulás a centripetális és érintőleges gyorsulás kapcsolata:

$$a^2 = a_{\text{cp}}^2 + a_0^2.$$

Ezt a gyorsulást a súrlódási erő okozza. A mozgásegyenletből (tömeggel osztva)

$$\mu^2 g^2 = \frac{v^4}{R^2} + a_0^2,$$

ahonnan a maximális sebesség a megcsúszásig:

$$v = \sqrt[4]{(\mu^2 g^2 - a_0^2) R^2} = 3,36 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A keresett idő

$$t = \frac{v}{a_0} = 1,68 \text{ s},$$

és az addig megtett út:

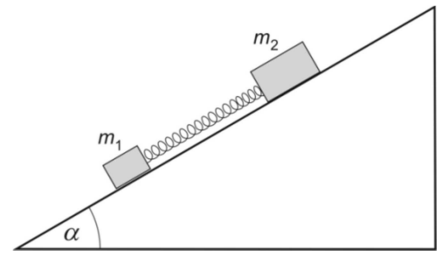
$$s = \frac{1}{2} a_0 t^2 = 2,82 \text{ m}.$$

3. feladat. Egy $\alpha = 30^\circ$ -os hajlásszögű lejtőn, a kezdetben rögzített $m_1 = 1 \text{ kg}$ és $m_2 = 2 \text{ kg}$ tömegű testeket $D = 200 \text{ N/m}$ direkciós erejű megnyújtott rugóval kapcsoltuk össze az ábra szerint. Abban a pillanatban, amikor a testek rögzítését megszüntettük, azok egymás irányába, azonos nagyságú gyorsulással indultak el.

a) Mekkora volt a rugó megnyúlása kezdetben?

b) Mekkora gyorsulással indultak a testek?

A súrlódási együttható értéke $\mu = 0,1$.

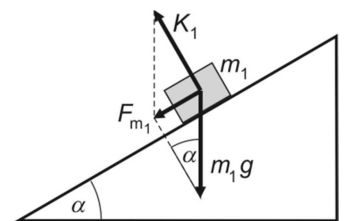


(Suhajda János)

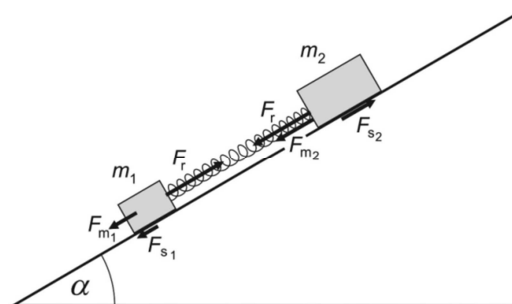
Megoldás. Adatok: $\mu_1 = \mu_2 = 0,1$; $m_1 = 1 \text{ kg}$; $m_2 = 2 \text{ kg}$; $D = 200 \text{ N/m}$; $\alpha = 30^\circ$.

A testekre ható erőket az ábra mutatja. A két rúgóerő azonos nagyságú, ellentétes irányú, a lejtővel párhuzamos. A felfelé induló kis testre ható súrlódási erő a lejtő mentén lefelé mutat, a lefele induló nagy testre ható erő pedig a lejtő mentén felfelé. Az első ábrán be nem rajzolt függőleges nehézségi erők (m_1g és m_2g), valamint a lejtő lapja által kifejtett, a lejtőre merőleges K_1 és K_2 kényszererő eredője a lejtővel párhuzamos, lefelé mutat. Ezek az erők szabják meg a testek gyorsulásait.

Az $\alpha = 30^\circ$ fok miatt az F_{m_1} és F_{m_2} erők a megfelelő nehézségi erőknek a fele. A K_1 és K_2 kényszererő (nyomóerő) pedig (egyenlő oldalú háromszög magassága lévén) a megfelelő nehézségi erőknek a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -szerese. Ettől függ a súrlódási erő nagysága, azaz



$$F_{s_1} = \mu K_1 = \mu m_1 g \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{ill.} \quad F_{s_2} = \mu K_2 = \mu m_2 g \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Tekintsük a mozgásegyenletek felírásánál mindkét testnél a rájuk ható rugóerő irányát pozitívnak, és használjuk ki az adatok adta lehetőséget, jelöljük m_1 -et m -mel, m_2 -t $2m$ -mel! A feltétel szerint tehát

$$a_1 = a_2.$$

Az 1-es jelzésű test mozgásegyenletéből annak gyorsulása:

$$F_r - F_{m_1} - F_{s_1} = m_1 a_1 \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{F_r - F_{m_1} - F_{s_1}}{m_1} = \frac{F_r - F_{m_1} - F_{s_1}}{m}.$$

A 2-es jelzésű test mozgásegyenletéből annak gyorsulása:

$$F_r + F_{m_2} - F_{s_2} = m_2 a_2 \quad \rightarrow \quad a_2 = \frac{F_r + F_{m_2} - F_{s_2}}{m_2} = \frac{F_r + F_{m_2} - F_{s_2}}{2m}.$$

Behelyettesítve a már meghatározott értékeket:

$$a_1 = \frac{F_r - F_{m_1} - F_{s_1}}{m} = \frac{F_r}{m} - \frac{mg}{m} - \frac{\mu m g \frac{\sqrt{3}}{2}}{m} = \frac{F_r}{m} - \frac{g}{2} - \mu g \frac{\sqrt{3}}{2},$$

és hasonlóképpen

$$a_2 = \frac{F_r + F_{m_2} - F_{s_2}}{2m} = \frac{F_r}{2m} + \frac{2mg}{2m} - \frac{\mu 2mg \frac{\sqrt{3}}{2}}{2m} = \frac{F_r}{2m} + \frac{g}{2} - \mu g \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A két gyorsulás nagysága egyenlő lévén írható:

$$\frac{F_r}{m} - \frac{g}{2} - \mu g \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{F_r}{2m} + \frac{g}{2} - \mu g \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Innen a rugóerő nagysága meghatározható. Elhagyva a súrlódási erők azonos kifejezését:

$$\frac{F_r}{m} - \frac{g}{2} = \frac{F_r}{2m} + \frac{g}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{F_r}{m} - \frac{F_r}{2m} = \frac{g}{2} + \frac{g}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{2F_r - F_r}{2m} = g \quad \rightarrow \quad F_r = 2mg.$$

Ezzel a rugó kezdeti megnyúlása a rugalmas alakváltozás rugóra vonatkozó törvénye alapján:

$$F_r = D\Delta l \quad \rightarrow \quad \Delta l = \frac{F_r}{D} = \frac{2mg}{D} = \frac{2 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{200 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = \mathbf{0,1 \text{ m}}.$$

b) A két test gyorsulásának nagysága pedig:

$$a_1 = \frac{F_r}{m} - \frac{g}{2} - \mu g \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2mg}{m} - \frac{g}{2} - \mu g \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}g - \mu g \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{3}{2} - \mu \frac{\sqrt{3}}{2} \right) g = \frac{3 - \mu\sqrt{3}}{2} g = \frac{3 - 0,1\sqrt{3}}{2} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \mathbf{14,134 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}.$$

(Ugyanezt kapjuk, ha a másik test gyorsulásának kifejezésébe helyettesítünk be.)

(Aki ismeri a szögfüggvényeket, rövidebben célhoz jut

$$a_1 = \frac{F_r}{m} - \frac{mg \sin \alpha}{m} - \frac{\mu mg \cos \alpha}{m} = \frac{F_r}{m} - g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha),$$

$$a_2 = \frac{F_r}{m} + \frac{2mg \sin \alpha}{2m} - \frac{\mu 2mg \cos \alpha}{2m} = \frac{F_r}{2m} + g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

A két gyorsulás egyenlőségéből $\alpha = 30^\circ$ behelyettesítése után a rugóerőre, majd a gyorsulásra a fenti értékeket kapjuk.)

4. feladat. Három egyenlő tömegű égitest, minden más testtől távol a világűrben, egy szabályos háromszög csúcsaiban helyezkedik el és körpályán kering a rendszer tömegközéppontja körül.

Mekkora tömegűek a testek, ha tudjuk, hogy távolságuk $d = 200\,000\text{ km}$, valamint, hogy keringésük periódusideje $T = 100\text{ nap}$?

(Kiss Miklós)

Megoldás.

Az ábra jelöléseit használva az R pályasugár:

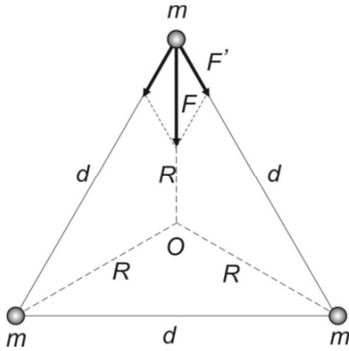
$$R = \frac{d}{\sqrt{3}}, \quad \rightarrow \quad d = R\sqrt{3}$$

Két test között ható gravitációs erő:

$$F' = f \frac{m^2}{d^2} = f \frac{m^2}{3R^2}$$

Egy testre ható eredő gravitációs erő az ábra alapján:

$$\sum F = \sqrt{3}F' = f \frac{\sqrt{3}m^2}{d^2} = f \frac{\sqrt{3}m^2}{3R^2}$$



A szimmetria miatt mindegyik test mozgásegyenlete:

$$\sum F = ma_{\text{cp}} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3} f \frac{m^2}{R^2} = mR\omega^2$$

Ebből:

$$\omega^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} f \frac{m}{R^3} = \frac{\sqrt{3}}{3} f \frac{m}{\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}}{3} f \frac{m}{\frac{d^3}{3\sqrt{3}}} = 3f \frac{m}{d^3}.$$

A keringés szögsebessége:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{100 \cdot 86400\text{ s}} = 7,2722 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{s}}$$

A tömegre adódik:

$$m = \frac{d^3 \omega^2}{3f} = \frac{(2 \cdot 10^8\text{ m})^3 \cdot \left(7,2722 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{s}}\right)^2}{3 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}} = 2,114 \cdot 10^{22} \text{ kg}.$$

Az égitestek tömege hozzávetőlegesen $m = 2,1 \cdot 10^{22} \text{ kg}$.

35. Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny

III. forduló

2016. május 1. Gyöngyös, 9. évfolyam

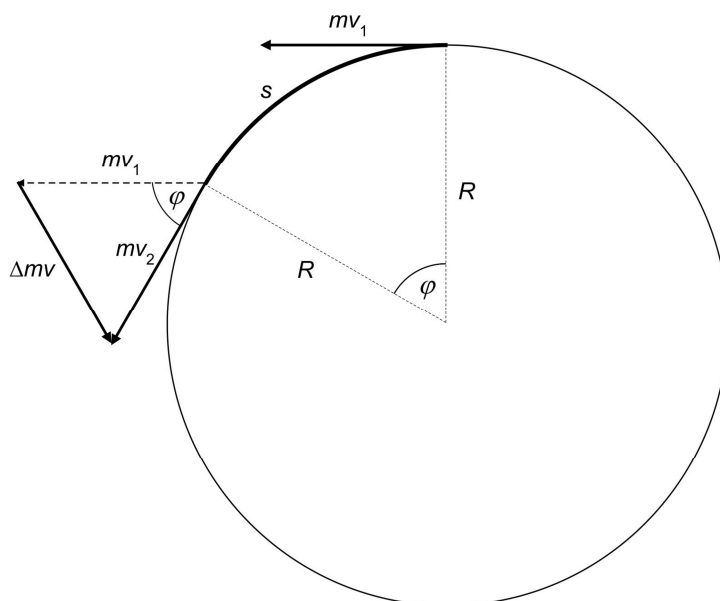
Gimnázium

1. feladat. Vízszintes talajon mindvégig egyenletesen haladó gépjármű tömege $m = 1000$ kg, sebessége $v = 36$ km/h. Legalább mekkora a kerekek és a talaj közötti súrlódás együtthatója, ha a gépkocsi lendülete $t = 6$ s alatt egyenletesen $\Delta I = 10\,000$ kgm/s-mal változik?

(Holics László)

Megoldás. Vegyük figyelembe, hogy a lendület (impulzus) *vektormennyiség*, amelynek abszolút értéke a test tömegének és sebességnagyságának szorzata. Ha a sebességnagyság állandó, a lendületváltozás csak a mozgás irányának változásából adódhat. Így az egyenletesen mozgó jármű lendülete csak görbevonalú pályán való mozgás során változhat meg. A lendület egyenletes változása pedig állandó nagyságú centripetális gyorsulást jelent, ami egyenletes sebesség esetén csak körpályán valósulhat meg.

Az ábra eligazít ismeretlen és az adatok között:



Vegyük észre, hogy a lendületváltozás nagysága éppen a mindenkorai lendületnagysággal egyenlő, mert a lendületváltozás $\Delta I = 10\,000$ kgm/s és a lendületnagyság $mv = 1000$ kg \cdot 10 m/s = $10\,000$ kgm/. Így a kezdő-, végső lendület és a lendületváltozás egyenlő oldalú háromszöget alkot, az ábrán jelzett φ szög, tehát $60^\circ = \pi/3$ rad.

A centripetális gyorsulást a súrlódási erő hozza létre. A kapcsolat a súrlódási együttható és a mozgásjellemzők között:

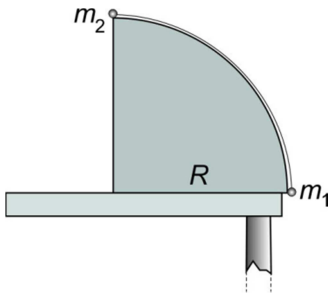
$$\mu mg = m \frac{v^2}{R} \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{v^2}{gR}.$$

Meghatározandó tehát a körpálya sugara. A megtett s út és a φ szögelfordulás kapcsolata az R sugárral:

$$R\varphi = s \quad \rightarrow \quad R = \frac{s}{\varphi} = \frac{vt}{\varphi}.$$

Ezzel a mozgás fenntartásához szükséges súrlódási együttható

$$\mu = \frac{v^2}{gR} = \frac{v^2}{g \frac{vt}{\varphi}} = \frac{\varphi v}{gt} = \frac{\pi v}{3gt} = \mathbf{0,175}.$$

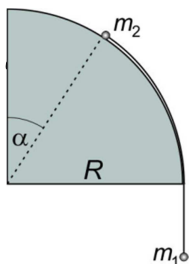


2. feladat. $R = 20$ cm sugarú, negyedhenger-alakú, asztal széléhez rögzített lejtőn két különböző tömegű, súlytalan és nyújthatatlan fonállal összekötött, pontszerű testet helyezünk el az ábra szerint. A lejtőhöz simuló fonál függőleges síkban helyezkedik el. A két testből és fonalból álló rendszert magára hagyva az m_2 tömegű test akkor válik el a lejtőtől, amikor szögelfordulása 30° . A súrlódás és a közegellenállás elhanyagolható.

- Mekkora ebben a pillanatban a testek sebessége?
- Mekkora a testek tömegaránya?
- Az m_1 tömegű test súlyának hányad része ekkor a fonálerő?

(Szkladányi András)

Megoldás. Adatok: $R = 0,2$ m; $\alpha = 30^\circ$;



a) Az elválás pillanatában a lejtő által kifejtett kényszererő megszűnik, az m_2 tömegű testet sugár irányba a nehézségi erő sugár irányú komponense gyorsítja:

$$m_2 g \frac{\sqrt{3}}{2} = m_2 \frac{v^2}{R} \text{ A keresett tömegarány}$$

A testek sebessége az elválás pillanatában:

$$v = \sqrt{gR \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1,32 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) A mechanikai energia megmaradása miatt:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = m_1 g R \frac{\pi}{6} + m_2 g R \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Az első egyenletet felhasználva és gR -rel való egyszerűsítés után:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) \frac{\sqrt{3}}{2} = m_1 \frac{\pi}{6} + m_2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Átalakítások után a keresett tömegarány:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2 - 3 \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}} \approx \mathbf{3,3}$$

c) A K fonálerőnek és az m_1 tömegű test súlyának aránya:

$$\frac{K}{m_1 g} = \frac{m_1(g - a)}{m_1 g} = 1 - \frac{a}{g}.$$

Itt a jelöli a testek érintő irányú közös gyorsulását, amely:

$$a = \frac{m_1 g + \frac{1}{2} m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

A keresett arány tehát:

$$\frac{K}{m_1 g} = 1 - \frac{m_1 + \frac{1}{2} m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{1}{2} m_2}{1 + \frac{m_1}{m_2}} = \frac{1}{4,3} \approx 0,116$$

3. feladat. Vízszintes, légpárnás (súrlódásmentes) asztalra helyezünk egy nagyméretű, $M = 2$ kg tömegű lapot, és a lap tetejére teszünk két kockát. A kisebbik tömege szintén M , a nagyobbiké $4M$. Könnyű ideális fonalak és egy szintén könnyű és ideális mozgócsiga segítségével a rendszert mozgásba hozzuk úgy, amint ezt az ábra mutatja. A kockák és a lap közötti csúszási súrlódási együttható $0,1$ értékű, míg a tapadási tényező $0,16$. Mekkora az ábrán látható F húzóerő nagysága, és mekkora gyorsulással mozognak a kockák, ha az alattuk lévő lap gyorsulása $0,2$ g, továbbá mekkora a csiga gyorsulása?



(Honyek Gyula)

Megoldás. Mivel a tömegek között is, valamint a súrlódási együtthatók között is jelentős a különbség, így feltételezhetjük (a végén persze ezt ellenőrizni kell), hogy a mozgás során a nagy kocka a laphoz tapad, míg a kicsi csúszik rajta.

A lapot vízszintes irányban a kis kocka által kifejtett $\mu M g = 0,1 M g = 2$ N csúszási súrlódási erő és a nagy kocka F_t aktuális (nem a maximálisan lehetséges) tapadási súrlódási ereje gyorsítja:

$$\mu M g + F_t = M a = M 0,2 g = 4 \text{ N}.$$

Ebből azonnal láthatjuk, hogy a tapadási súrlódási erő nagysága szintén

$$F_t = \mu M g = 0,1 M g = 2 \text{ N},$$

ami jelentősen kisebb, mint a tapadási erő elméleti maximuma:

$$\max F_t = \mu_0 4 M g = 0,64 M g = 12,8 \text{ N},$$

tehát jogos volt azt feltételezni, hogy a nagy kocka a lappal együtt mozog.

A csiga könnyű, ideális, valamint a fonál is elhanyagolható tömegű, így a fonálban ébredő erő $F/2$ nagyságú. Vízszintes irányban a nagy kockára a fonálerő és a tapadási súrlódási erő hat, tehát a következő mozgásegyenletet írhatjuk fel:

$$\frac{F}{2} - F_t = 4M(0,2g) = 0,8Mg = 16 \text{ N.}$$

Írjuk be a tapadási súrlódási erőt:

$$\frac{F}{2} - 0,1Mg = 0,8Mg,$$

amiből a kérdéses húzóerő

$$F = 1,8Mg = 36 \text{ N.}$$

A kis kocka mozgásegyenlete:

$$\frac{F}{2} - \mu Mg = Ma,$$

amiből

$$a = 0,8g \approx 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

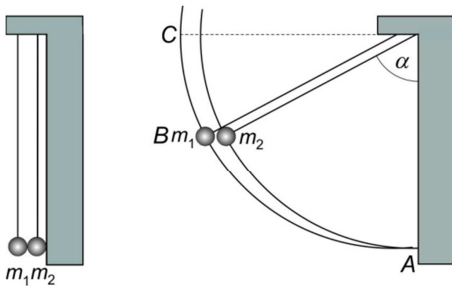
A kis kockára a fonál $0,9Mg = 18 \text{ N}$ erővel hat, ami olyan nagy, hogy (a feltételezésünkkel egyezően) a kis kocka megcsúszik a lapon.

A nagy kocka gyorsulása megegyezik a lap $0,2 g \approx 2 \text{ m/s}^2$ gyorsulásával.

Hátra van még a csiga gyorsulásának a meghatározása.

A laphoz képest a kis kocka $8 \text{ m/s}^2 - 2 \text{ m/s}^2 = 6 \text{ m/s}^2$ gyorsulással mozog, tehát a laphoz képest a mozgócsiga gyorsulása ennek a fele, vagyis 3 m/s^2 . Ehhez hozzáadódik még a lap, illetve a nagy kocka 2 m/s^2 nagyságú gyorsulása, vagyis a csiga a légpárnás asztalhoz képest 5 m/s^2 értékű gyorsulással mozog. Érdekességként állapíthatjuk meg, hogy a csiga a mozgás során távolodik a laptól (és a vele együtt mozgó nagy kockától), azonban a kis kocka közeledik a csigához.

4. feladat. Két egymás mellett felfüggesztett inga éppen összeér, a második a falhoz is hozzáér (A ábra). A testek tömege $m_1 = 50 \text{ g}$, $m_2 = 150 \text{ g}$, méretük megegyezik. Az ingákat a B ábrán látható módon $\alpha = 60^\circ$ -kal kitérítjük a B jelű helyzetig és elengedjük.



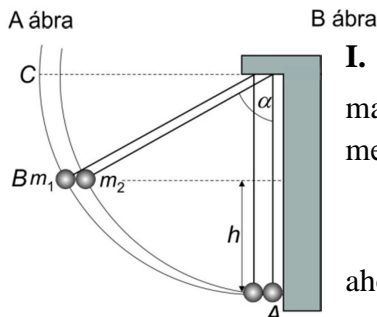
módon $\alpha = 60^\circ$ -kal kitérítjük a B jelű helyzetig és elengedjük.

a) Mekkora a testek sebessége az ütközés után, amikor elérik az A, B, és C jelű helyzetekben?

b) Mekkora az egyes fonalakat feszítő erő közvetlenül az ütközés előtt és után az A jelű helyen?

Az inga hossza $62,5 \text{ cm}$. Minden ütközést tekintsünk tökéletesen rugalmasnak és pillanatszerűnek!

(Kiss Miklós)



I. Megoldás. a) Legyen az ingák hossza L , $m_1 = m$, így $m_2 = 3m$. A B magasságából induló testek sebessége A magasságában az energia megmaradás alapján:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mg \frac{L}{2},$$

ahol h a 60° miatt az ingák hosszának a fele. Ebből:

$$v = \sqrt{gL} \approx 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Elsőként az m_2 tömegű test ütközik a falnak és ugyanakkora sebességgel visszapattan a rugalmas ütközés miatt. Ezután a két test ütközik. Ennek következtében az m_2 tömegű test megáll, az m_1 tömegű test sebességének a nagysága megduplázódik. Ennek indoklása:

$$v_{\text{TKP}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{mv - 3mv}{4m} = -\frac{v}{2} = -1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A képletben figyelembe vettük a második test sebességének irányát, a tömegközéppont balra mozog.

A golyók most összeérnek, rögtön ütköznek, de nézzük külön az ütközés problémáját. Érkezzen egyenes vonalú pályán távolról a két test és ütközzenek így centrálisan. Az nem befolyásolja az ütközés utáni sebességeket, hogy egyenes vonalú pályán milyen távolról érkeznek a két test, de könnyebben áttekinthetjük az egyes testek sebességének alakulását.

Mekkora a testek sebessége a tömegközépponti (továbbiakban TKP-i) rendszerben?

Az m_1 tömegű test egy másodperc alatt két és fél métert haladna jobbra, a tömegközéppont egy és negyed métert balra, ezért az m_1 tömegű test a TKP rendszerben egy másodperc alatt 3,75 métert haladna jobbra, vagyis a sebessége

$$u_1 = 3,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Az m_2 tömegű test két és fél métert haladna egy másodperc alatt a tömegközépponttal egyező irányban, így a távolságuk egy másodperc alatt 1,25 méterrel csökkenne. Ezért az m_2 tömegű test sebessége

$$u_2 = -1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A negatív előjel most is a haladás irányát mutatja.

Ha rugalmasan ütköznek, akkor lendületük, így sebességük nagysága sem változik meg, csak az irányuk változik meg. Ennek megfelelően az ütközés utáni sebességek a TKP-i rendszerben

$$u'_1 = -3,75 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

illetve

$$u'_2 = 1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Most még vissza kell térni a laboratóriumi rendszerbe. Az első test visszafelé halad 3,75 métert, de a tömegközéppont is erre halad 1,25 métert, így egy másodperc alatt öt métert halad visszafelé, ezért

$$v'_1 = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Az m_2 tömegű test 1,25 métert haladna előre a tömegközépponthez képest, de a tömegközéppont 1,25 métert haladna balra, ezért ez a test összesen nem halad semennyit, tehát sebessége

$$v'_2 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

lesz, vagyis megáll. (A 2-es test tehát A -ban marad, nem megy sem a B , sem a C pontba.)

Az 1-es test sebessége ezután a B pontban:

$$\frac{1}{2}m(2v)^2 = mg\frac{L}{2} + \frac{1}{2}mv'^2,$$

ebbe a sebességet behelyettesítve:

$$\frac{1}{2}4gL = g\frac{L}{2} + \frac{1}{2}v'^2$$

Ebből:

$$v'^2 = 3gL, \quad \text{így} \quad v' = \sqrt{3gL} = \sqrt{3}\sqrt{gL} \approx 4,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Az 1-es test sebessége ezután a C pontban:

$$\frac{1}{2}m(2v)^2 = mgL + \frac{1}{2}mv''^2,$$

ebbe a sebességet behelyettesítve:

$$\frac{1}{2}4gL = g\frac{2L}{2} + \frac{1}{2}v''^2$$

Ebből:

$$v''^2 = 2gL, \quad \text{így} \quad v'' = \sqrt{2gL} = \sqrt{2}\sqrt{gL} \approx 3,54 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Az A helyen a sebességek változnak, a körpálya miatt a kötélerek is. A dinamika alaptörvénye a sebességre merőleges komponensekre:

$$m \cdot a_{\text{cp}} = K - mg,$$

ezért

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = K - mg,$$

így

$$K = mg + m \cdot \frac{v^2}{R}.$$

Az 1-es test az ütközések előtt:

$$K = mg + m \cdot \frac{gL}{L} = 2mg \approx 1\text{N}.$$

A 2-es test érkezéskor és a fallal való ütközés után:

$$K = 3mg + 3m \cdot \frac{gL}{L} = 6mg \approx 3\text{N}.$$

Az 1-es test az ütközések után:

$$K = mg + m \cdot \frac{4gL}{L} = 5mg \approx 2,5\text{N}.$$

A 2-es test az ütközés után áll, ezért:

$$K = 3mg \approx 1,5\text{N}.$$

II. megoldás. a) Legyen az ingák hossza L , $m_1 = m$, így $m_2 = 3m$. A B magasságából induló testek sebessége A magasságában az energia megmaradás alapján:

$$\frac{1}{2}mw^2 = mgh = mg \frac{L}{2},$$

ahol h a 60° miatt az ingák hosszának a fele. Ebből:

$$v = \sqrt{gL} \approx 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ekkora sebességgel érkezik mindkét test az A pontba. Ha általános esetet tételezünk fel, a folyamat során (a kért magasságok eléréséig) 3 ütközésnek kell lezajlania:

1. az m_2 tömegű golyó ütközik a fallal, majd visszapattanás után
2. az m_2 ütközik az érkező m_1 tömegű golyóval, amiről visszapattan,
3. és újból ütközik a fallal, amiről visszapattan.

A tényleges ütközéseket a tömegarányok határozzák meg.

Az abszolút rugalmas ütközés (függvénytáblázatban megtalálható) képletét alkalmazzuk. Az ütközés utáni sebességeket u_1 -gyel és u_2 -vel jelöljük. Az irányokat az érkezési sebesség irányában tekintjük pozitívnak.

Az m_2 tömegű test a „végtelen tömegű” fallal való első ütközése után v nagyságú sebességgel pattan vissza. Ezután a két golyó ütközése következik.

Az abszolút rugalmas ütközés általános összefüggése:

$$u_1 = (k+1) \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1,$$

ahol a k „ütközési szám” abszolút rugalmas ütközésnél 1, abszolút rugalmatlannál 0.

Alkalmazzuk az ütközés utáni sebességek meghatározását a mi esetünkre ($k+1 = 2$, és $m_2 = 3m_1$ alkalmazásával ($m_1 = m$ rövid jelöléssel):

$$u_1 = 2 \frac{mv - 3mv}{m + 3m} - v = \frac{2mv - 6m - mv - 3mv}{m + 3m} = 2v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

tehát az m_1 tömegű test megduplázta sebességének nagyságát.

Hogyan mozog tovább az m_2 tömegű test? Az abszolút rugalmas ütközés formulája $m_2 = 3m$ -re:

$$u_2 = 2 \frac{-mv + 3mv}{m + 3m} - v = \frac{-2mv + 6m - mv - 3mv}{4m} = 0,$$

tehát a speciális tömegarányok miatt nem következik be harmadik ütközés (a fallal), hanem az m_2 tömegű test az A pontban marad, nem megy sem a B , sem a C pontba!

Az m_1 tömegű test sebessége ezután a B pontban az energiatételből:

$$\frac{1}{2}m(2v)^2 = mg \frac{L}{2} + \frac{1}{2}mv'^2,$$

ebbe a sebességet behelyettesítve egyszerűsítések után:

$$4gL = gL + v'^2$$

Ebből:

$$v'^2 = 3gL, \quad \text{így} \quad v' = \sqrt{3gL} = \sqrt{3} \sqrt{gL} \approx 4,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Az m_1 tömegű test sebessége ezután a C pontban:

$$\frac{1}{2}m(2v)^2 = mgL + \frac{1}{2}mv''^2,$$

ebbe a sebességet behelyettesítve:

$$\frac{1}{2}4gL = g\frac{2L}{2} + \frac{1}{2}v'^2$$

Innen:

$$v'^2 = 2gL, \quad \text{így} \quad v' = \sqrt{2gL} = \sqrt{2}\sqrt{gL} \approx \mathbf{3,54 \frac{m}{s}}.$$

A *b)* kérdésre adott válasz azonos az I. megoldásbelivel.